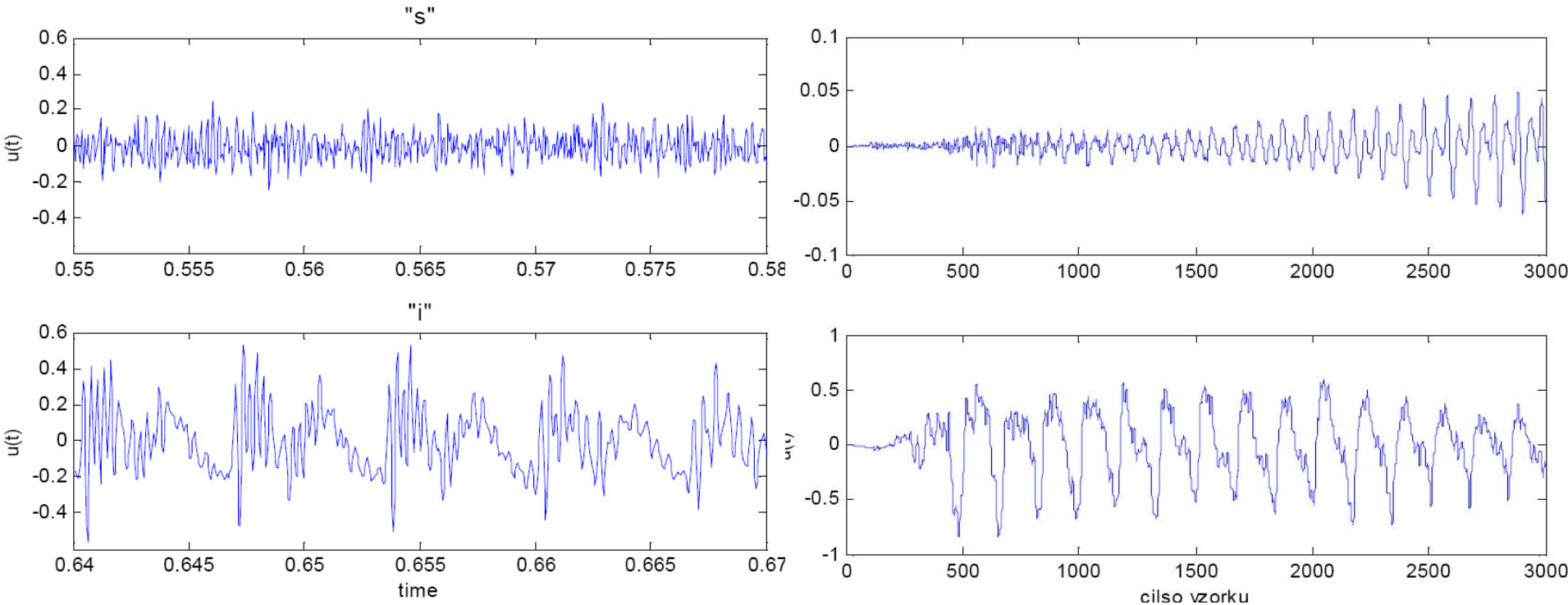


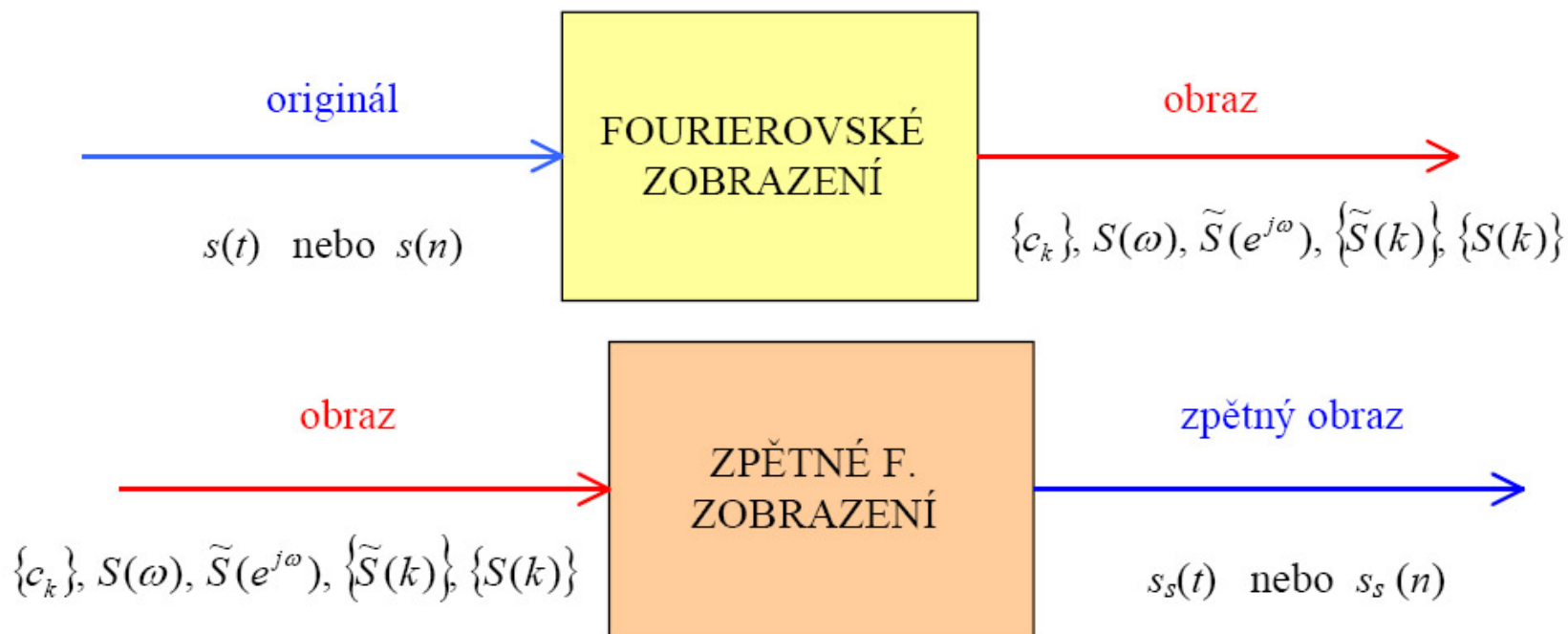
Signál v čase a jeho spektrum



Signály v časovém průběhu (tak jak je vidíme na osciloskopu) můžeme dělit na periodické a neperiodické. V obou případech je lze popsat spektrálně – určit jaké kmitočty v sobě obsahují.

Fourierova transformace

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt \quad R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt \quad X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt$$



$$R_{x,y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt.$$

Převod mezi časovou a kmitočtovou doménou se nazývá Fourierova transformace (zobrazení), nazpět pak zpětná transformace.

Intuitivně můžeme Fourierovu transformaci vnímat jako korelaci signálu s kosinusovými, resp. sinusovými funkcemi různých kmitočtů

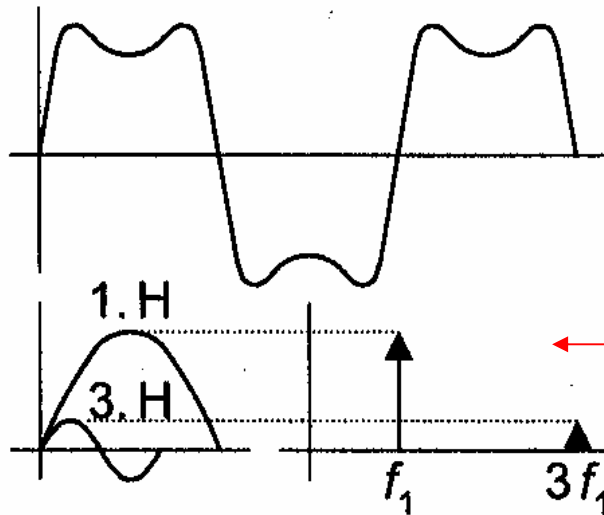
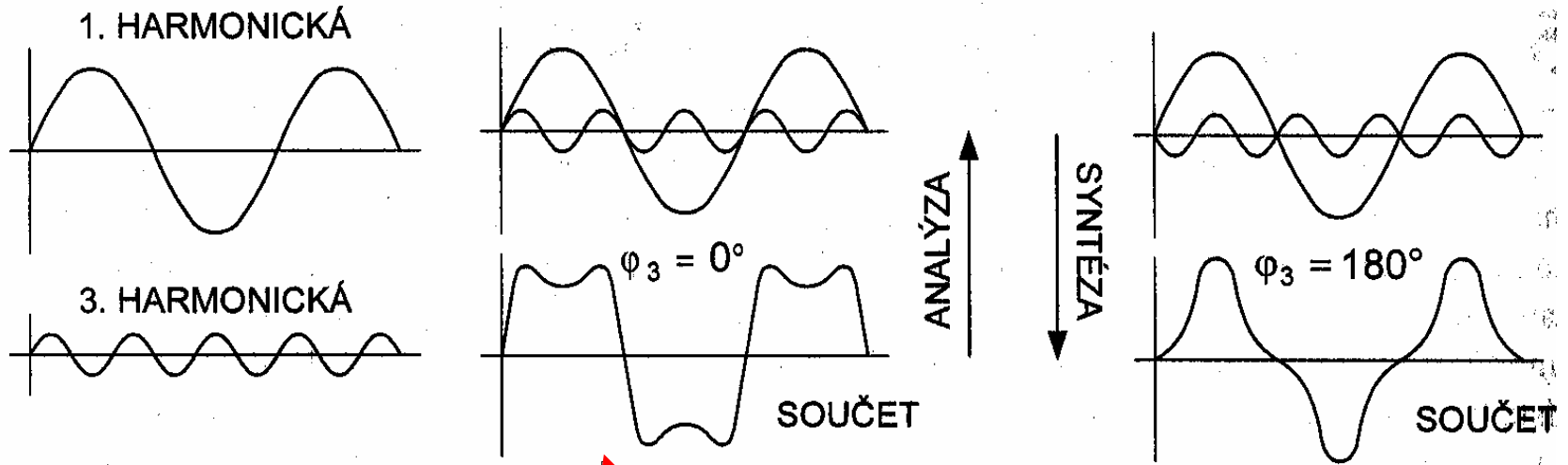
Transformace periodického signálu

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t),$$

	ANALYTICKÁ METODA	NUMERICKÁ METODA	POZNÁMKA
STEJNOSMĚRNÁ SLOŽKA	$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(\alpha) d\alpha$	$A_0 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p y_i$	ÚHEL: $\alpha = \omega t$
KOSINUSOVÁ SLOŽKA	$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(\alpha) \cdot \cos(k\alpha) d\alpha$	$A_k = \frac{2}{p} \sum_{i=1}^p y_i \cdot \cos(k\alpha)$	PERIODA: $T = 2\pi$
SINUSOVÁ SLOŽKA	$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(\alpha) \cdot \sin(k\alpha) d\alpha$	$B_k = \frac{2}{p} \sum_{i=1}^p y_i \cdot \sin(k\alpha)$	POČET VZORKŮ: p

Fourierova transformace – spektrum periodických signálů není spojité, mluvíme o Fourierově řadě. Z toho plyne, že libovolný periodický signál můžeme rozložit a opět složit z mnoha kosinových a sinových funkcí (a stejnosměrné složky). Tyto funkce budou mít kmitočty rovné celistvým násobkům základního kmitočtu periodického signálu. Říkáme jim harmonické složky. Jejich amplitudy jsou dány koeficienty Fourierova rozvoje.

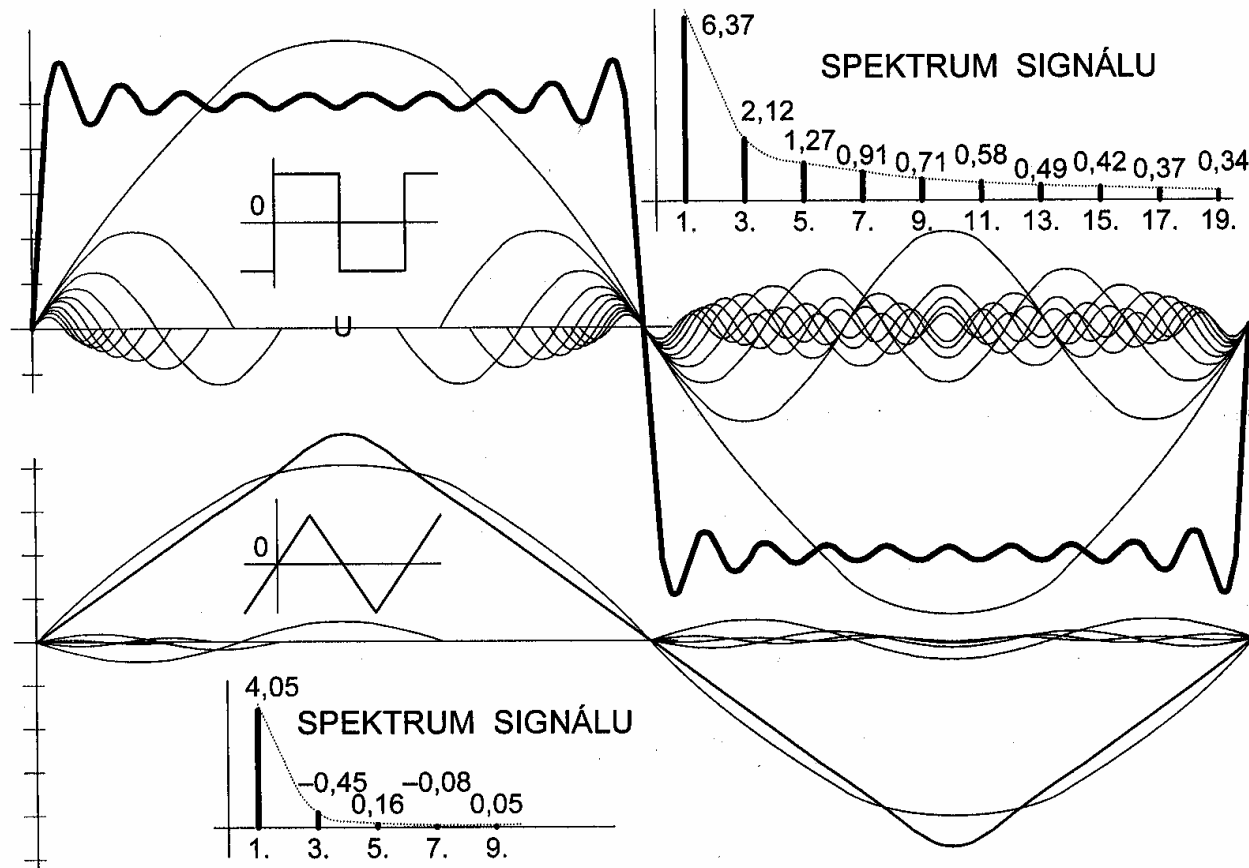
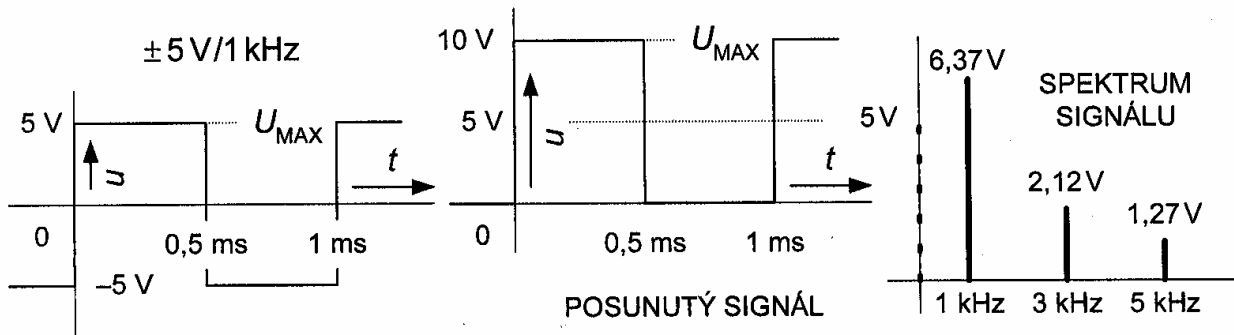
Harmonické složky periodického signálu



Tvar periodického signálu vznikající součtem sinusových (kosinových) funkcí o násobcích základního kmitočtu.

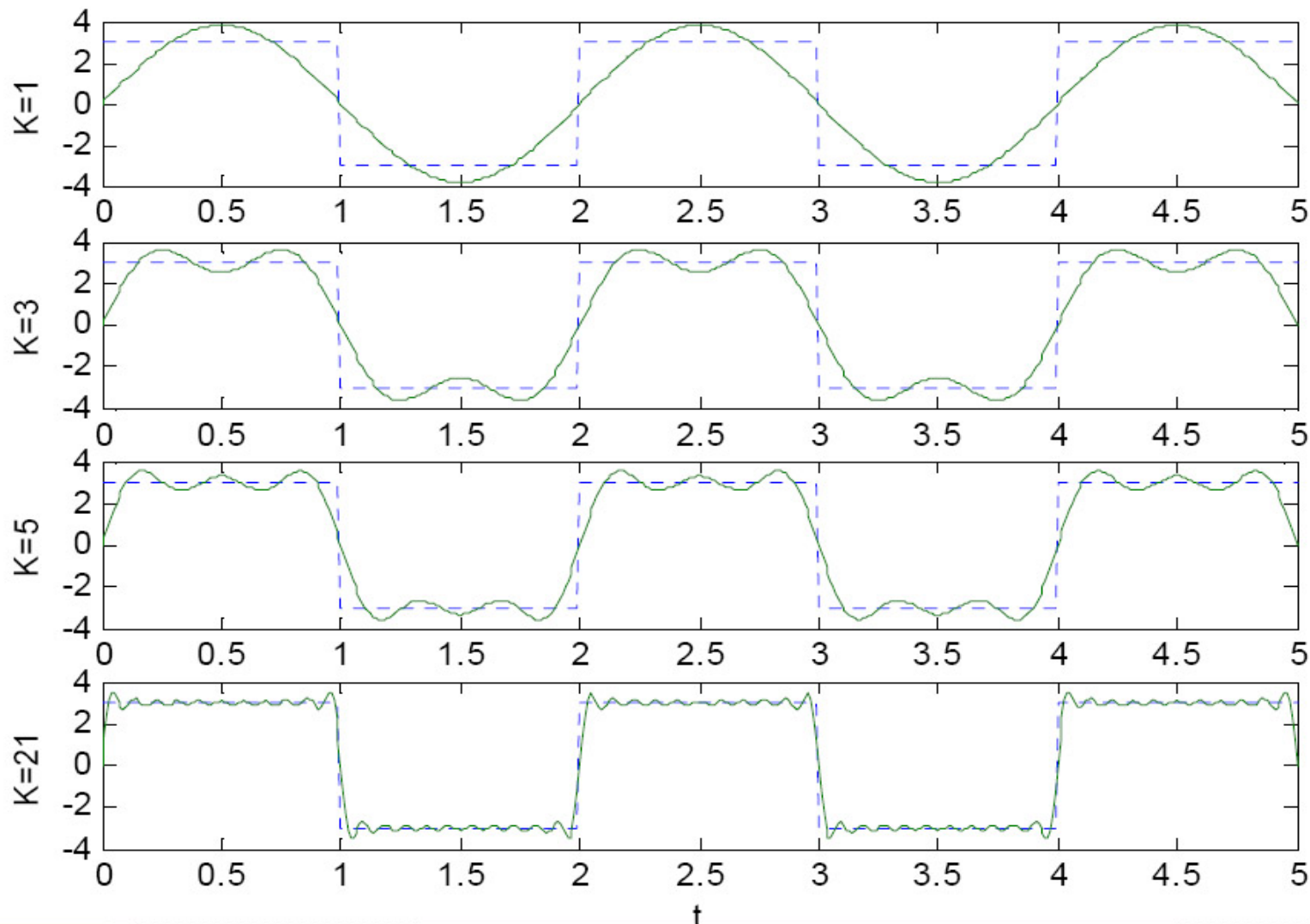
Amplituda harmonických složek v časové a spektrální reprezentaci.

Analýza a syntéza signálů



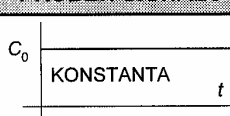
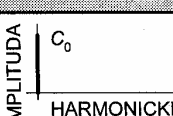
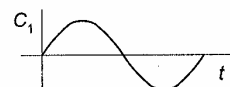
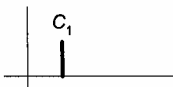
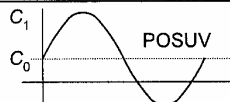
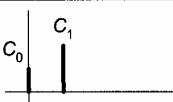
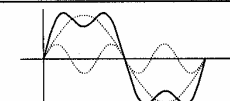
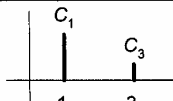
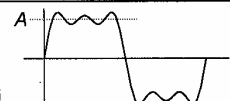
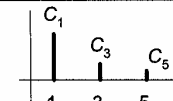
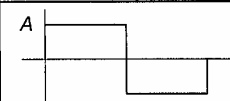
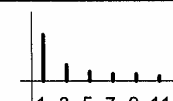

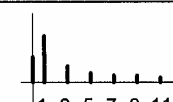
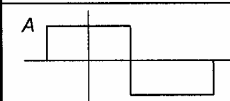
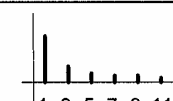

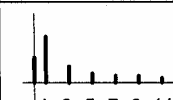

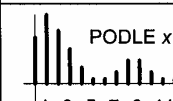
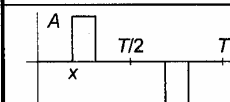
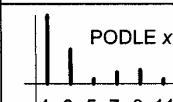
Vznik periodického signálu obdélníkového a trojúhelníkového průběhu. Je zřetelné, že symetrický tvar půlvln musí obsahovat jen liché složky. Koeficienty Fourierova rozvoje mohou mít kladné i záporné znaménko, což reprezentuje fázi sinusové funkce 0° , resp. 180° .

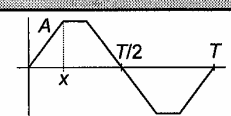
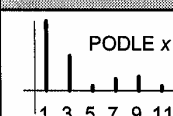
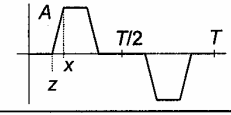
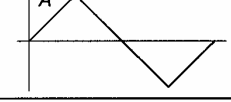
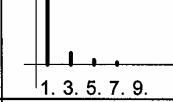
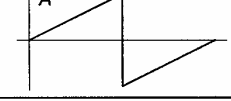
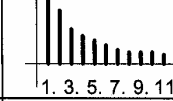
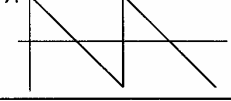
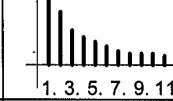
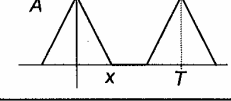
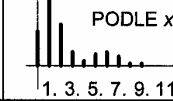
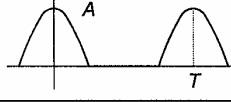
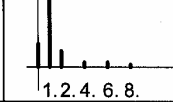

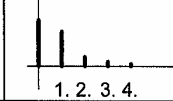
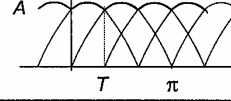
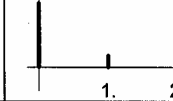
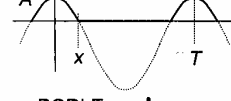
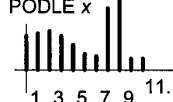
Vliv počtu harmonických



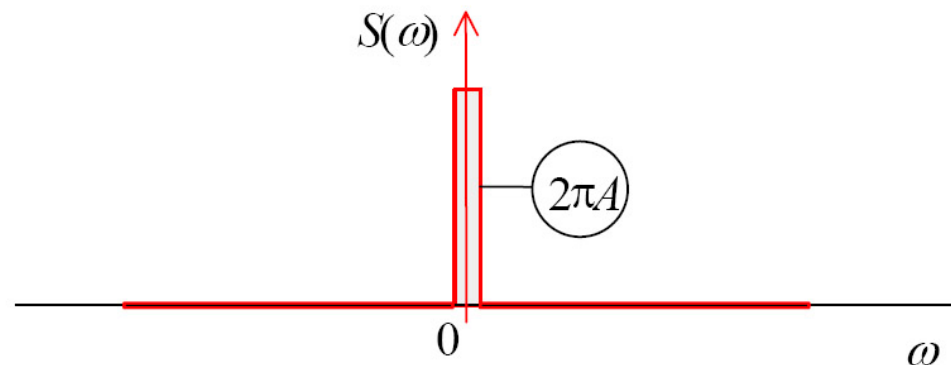
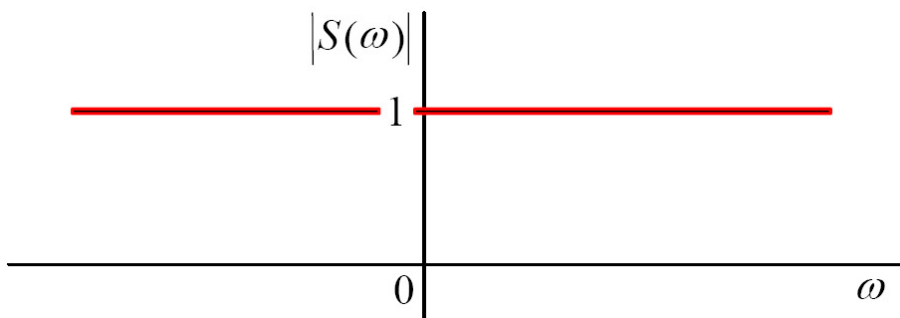
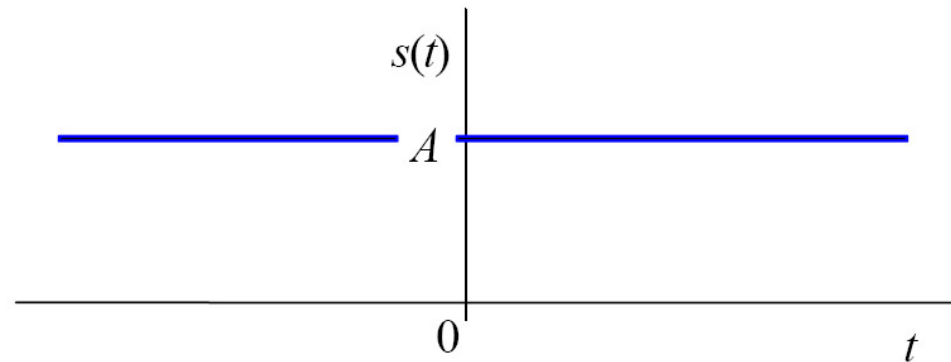
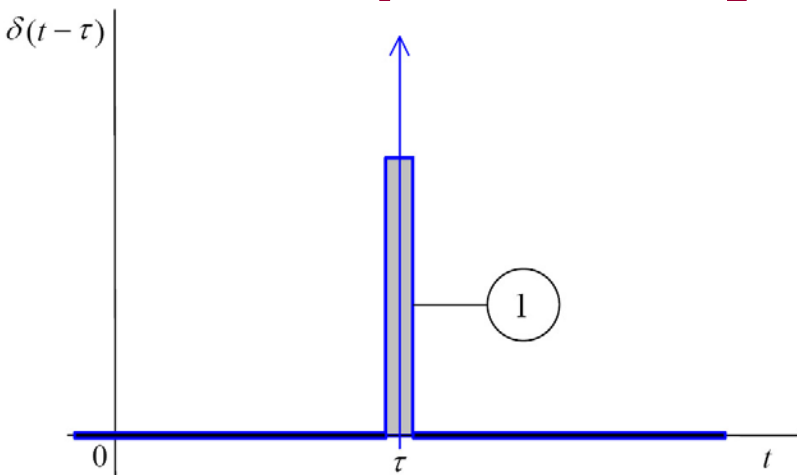
Postupné skládání lichých harmonických vytváří obdélníkový signál. Do ideálního obdélníkového tvaru je nutné sečíst nekonečný počet složek.

Periodické signály a spektra

PRŮBĚH SIGNÁLU	FOURIERŮV ROZVOJ	SPEKTRUM
	$y = C_0$	AMPLITUDA  HARMONICKÉ
	$y = C_1 \sin \alpha$; kde $\alpha = \omega t$	
	$y = C_0 + C_1 \sin \alpha$	
	$y = C_1 \sin \alpha + C_3 \sin(3\alpha)$	
	$y = C_1 \sin \alpha + C_3 \sin(3\alpha) + C_5 \sin(5\alpha)$ $y = \frac{4A}{\pi} \left\{ \sin \alpha + \frac{\sin(3\alpha)}{3} + \frac{\sin(5\alpha)}{5} \right\}$	
	$y = \frac{4A}{\pi} \left\{ \frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin(3\alpha)}{3} + \frac{\sin(5\alpha)}{5} + \dots \right\}$	
	$y = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left\{ \frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin(3\alpha)}{3} + \dots \right\}$	
	$y = \frac{4A}{\pi} \left\{ \frac{\cos \alpha}{1} - \frac{\cos(3\alpha)}{3} + \frac{\cos(5\alpha)}{5} - \dots \right\}$	
	$y = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} \cos\{(2i-1)\alpha\}$	
	$y = \frac{A}{\pi} \left(x + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin(ix) \cos\{i\alpha\} \right)$	PODLE x 
	$y = \frac{4A}{\pi} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos\{(2i-1)x\}}{2i-1} \sin\{(2i-1)\alpha\}$	PODLE x 

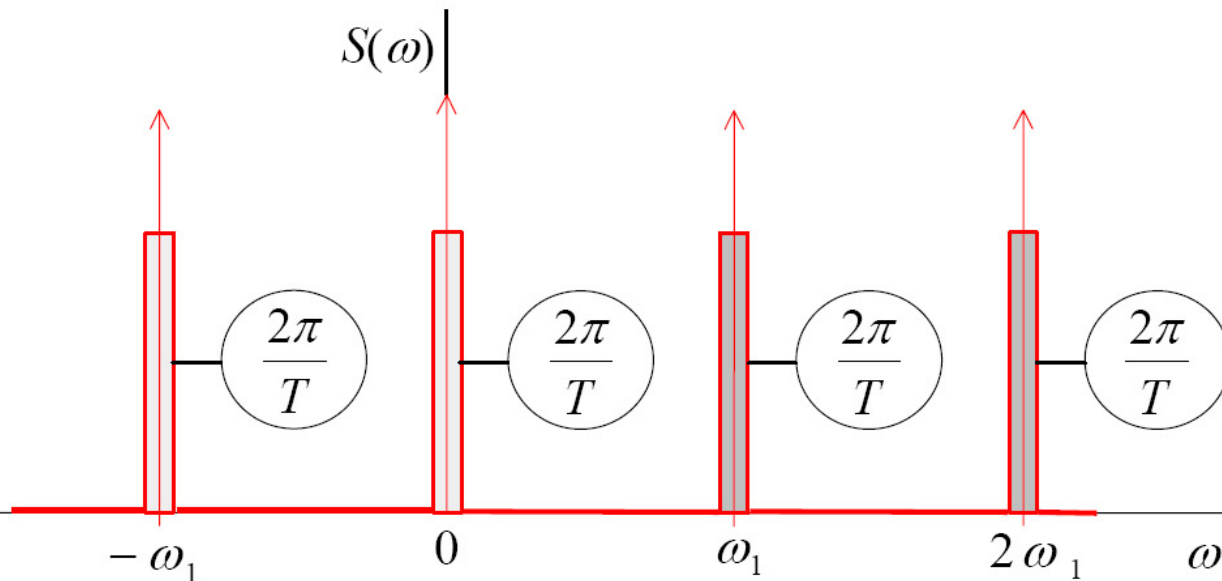
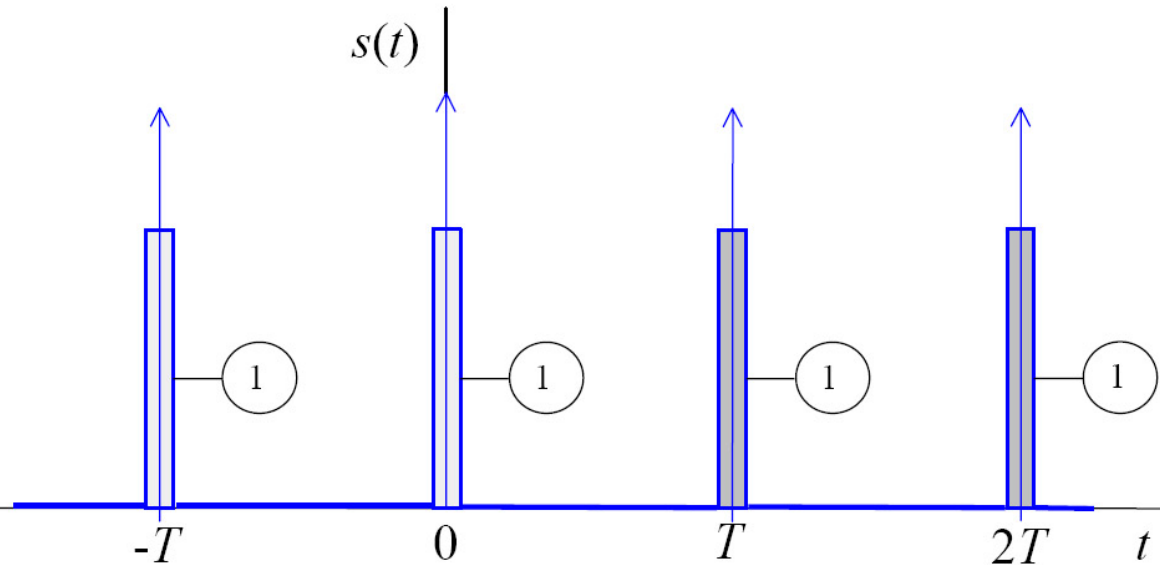
PRŮBĚH SIGNÁLU	FOURIERŮV ROZVOJ	SPEKTRUM
	$y = \frac{4A}{\pi x} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin\{(2i-1)x\}}{(2i-1)^2} \sin\{(2i-1)\alpha\}$	PODLE x 
	$y = \frac{4A}{\pi(x-z)} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin\{(2i-1)x\} - \sin\{(2i-1)z\}}{(2i-1)^2} \sin\{(2i-1)\alpha\}$	
	$y = \frac{8A}{\pi^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin\{(2i-1)\alpha\}$	
	$y = \frac{2A}{\pi} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \sin(i\alpha)$	
	$y = \frac{2A}{\pi} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin(i\alpha)$	
	$y = \frac{x A}{2\pi} + \frac{2A}{\pi x} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(ix)}{i^2} \cos(i\alpha)$	PODLE x 
	$y = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \cos \alpha + \frac{2A}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{4i^2 - 1} \cos(2i\alpha)$	
POLOVIČNÍ PERIODA 	$y = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{4i^2 - 1} \cos(i\alpha)$	
	$y = \frac{3A}{\pi} - \frac{6A}{\pi} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{1}{(6i-1)(6i+1)} \cos(i\alpha)$	
	$y = \frac{A \{ \sin x - x \cos x + (x - \sin x \cos x) \cos \alpha \}}{\pi(1 - \cos x)} + \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{\sin\{(i+1)x\}}{i+1} + \frac{\sin\{(i-1)x\}}{i-1} - \frac{2 \sin(ix) \cdot \cos x}{i} \right] \cdot \cos(i\alpha)$	PODLE x 
VE VZTAŽÍCH JE POUŽITA SUBSTITUCE: $\alpha = \omega t$		

Neperiodický signál a jeho spektrum



Spektrum neperiodického signálu je spojité. Extrémní případy představují jednotkový impulz (nekonečně krátkou dobu trvající pulz s plochou = 1), který má rovnoměrné spojité spektrum, jsou v něm obsaženy všechny frekvence. Stejnoseměrný signál má jednotkové spektrum s hodnotou v nule, ss napětí – nulová frekvence.

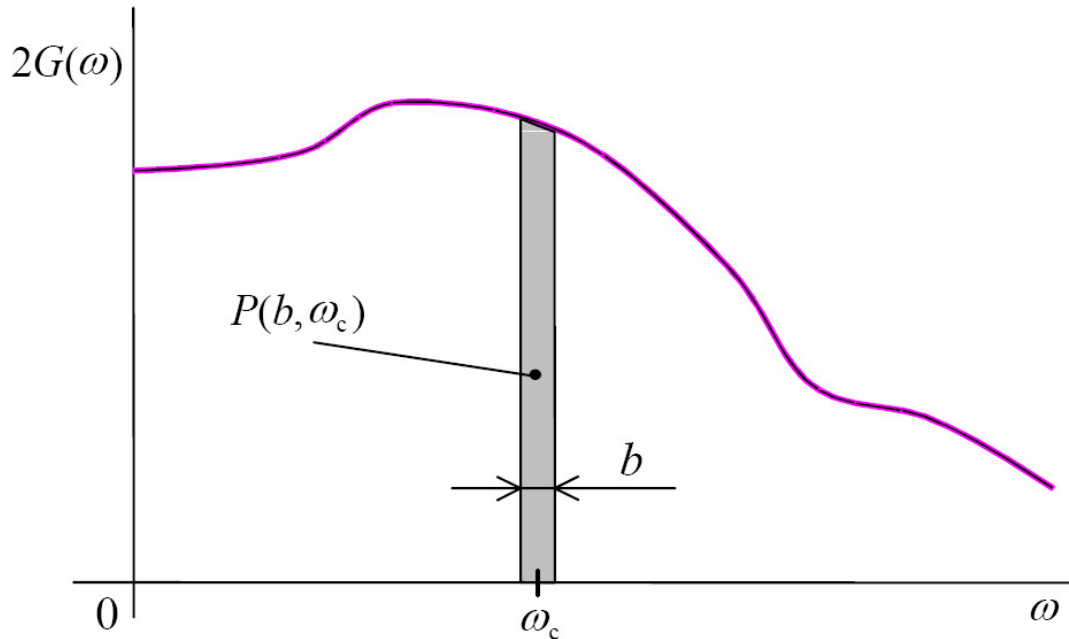
Periodické impulzy



Sekvence periodicky se opakujících jednotkových pulzů má spektrum obdobné jednomu pulzu, jen se rozpadne do diskrétní podoby spektrálních komponent o frekvencích rovných násobku opakovacího kmitočtu pulzů.

Znamená to, že součet nekonečně mnoha sinusových funkcí stejných amplitud o násobcích základního kmitočtu je sled nekonečně krátkých pulzů.

Spektrální hustota výkonu



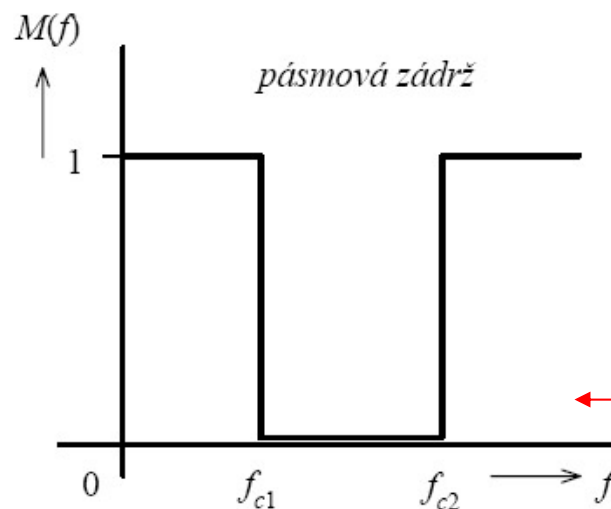
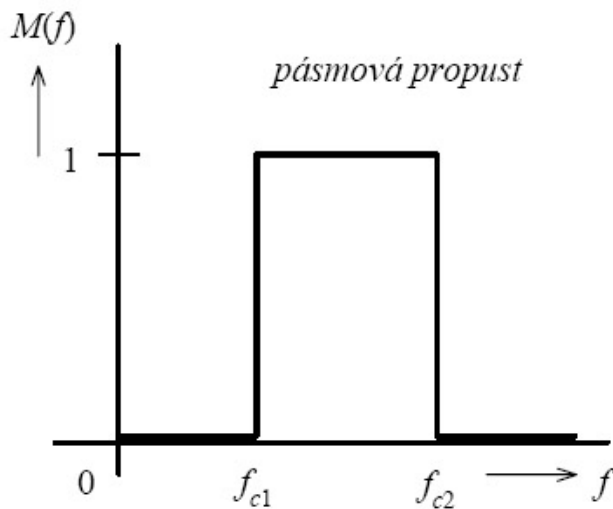
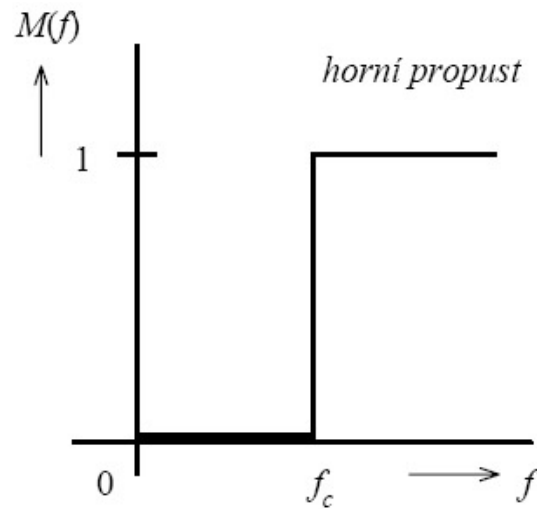
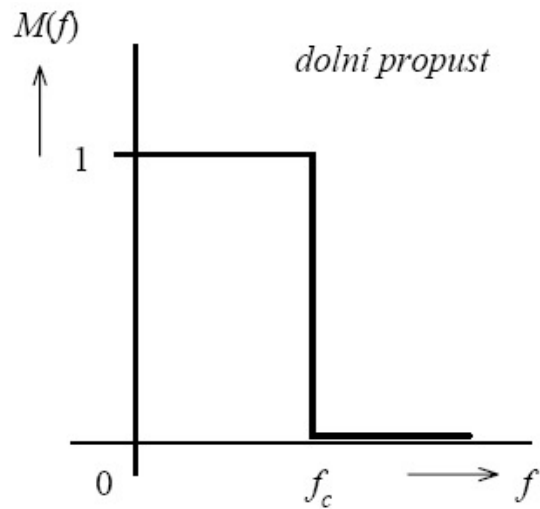
Na spektrum signálu se lze dívat jako na funkci, která nám říká, jaká část výkonu je nesena jakými frekvenčními složkami: je to funkce spektrální hustoty výkonu. Celkový výkon přenášený signálem pak bude integrál spektrální hustoty výkonu od $-\infty$ do $+\infty$.

Výkonová spektrální hustota (např. šumu) se udává ve Watech na Hertz.

Výkon v určitém pásmu (od ω_1 do ω_2) pak bude:

$$P = \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(\omega) d\omega + \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} G(\omega) d\omega = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(\omega) d\omega$$

Úprava spektra signálu – filtry

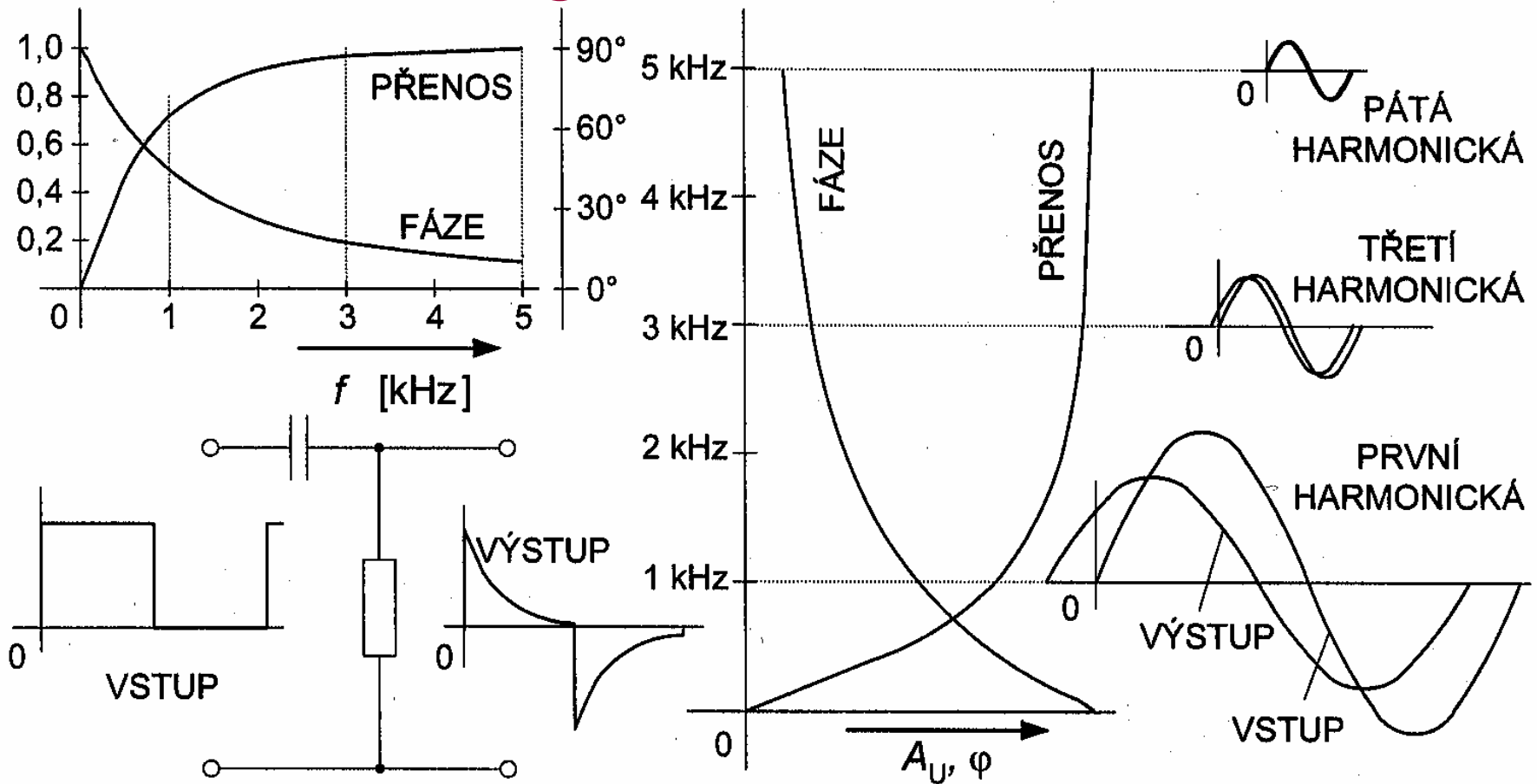


Lineární obvody jsou takové, které při průchodu harmonického (sinusového) signálu nezmění jeho spektrum. Například filtry. U neharmonických periodických signálů mohou změnit jejich tvar tak, že potlačí některé harmonické složky.

Ideální spektrální charakteristiky základních filtrů:

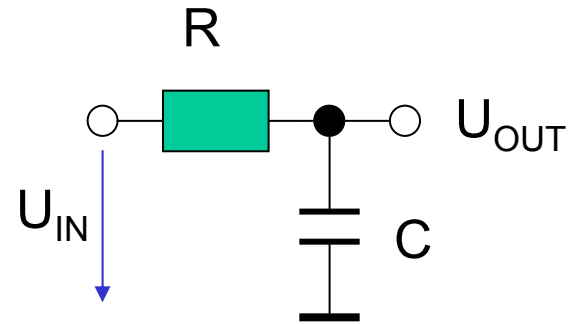
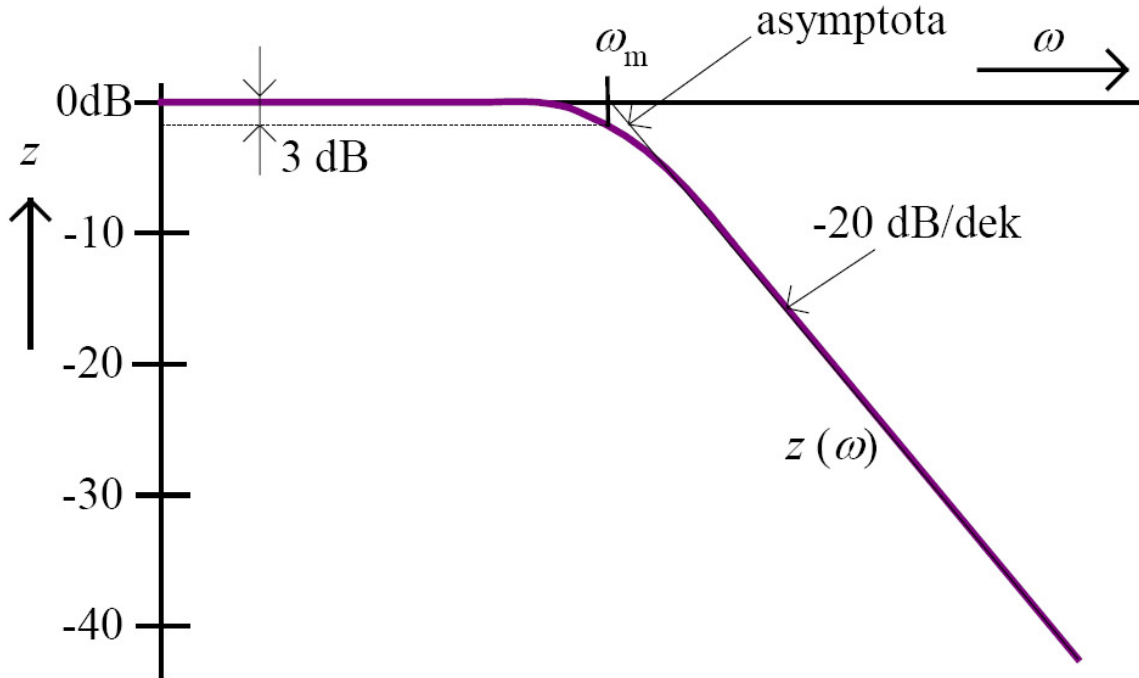


Průchod signálu lineárním obvodem



Filtr, zde např. RC člen – horní propust – derivační člen: z pohledu časového průběhu derivuje obdélníkový signál. Ze spektrálního pohledu propustí 5. harmonickou, mírně potlačí a fázově posune 3. harmonickou, více potlačí a fázově posune 1. harmonickou. Sečetli-li bychom pozměněné harmonické složky, získáme opět derivační tvar signálu.

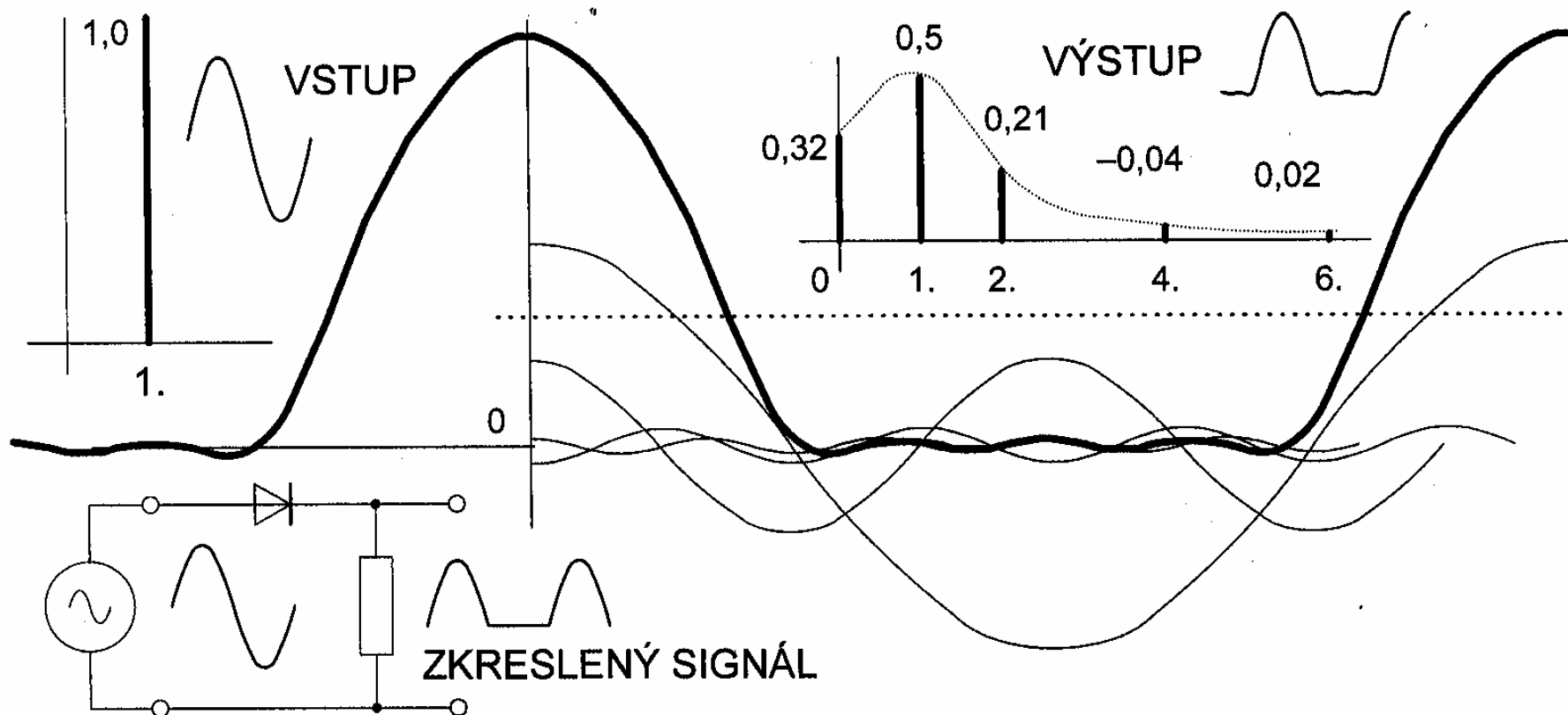
Dolní propust – integrační článek – RC filtr



„Přenos“ $Z = U_{OUT} / U_{IN}$

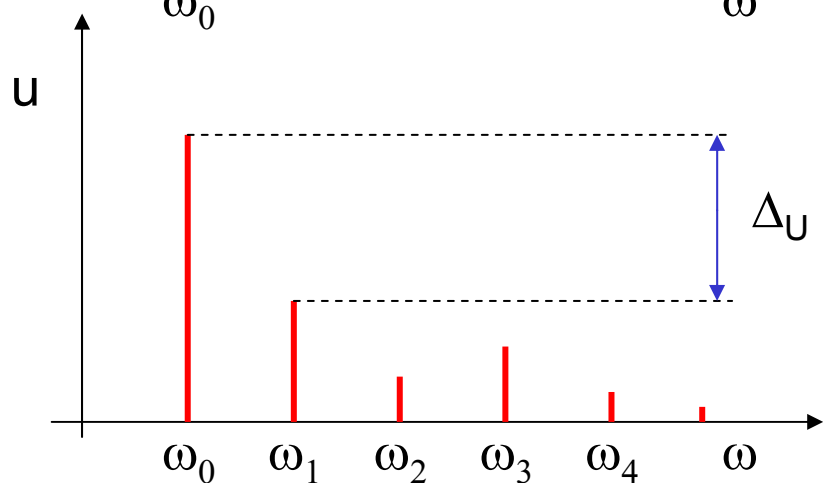
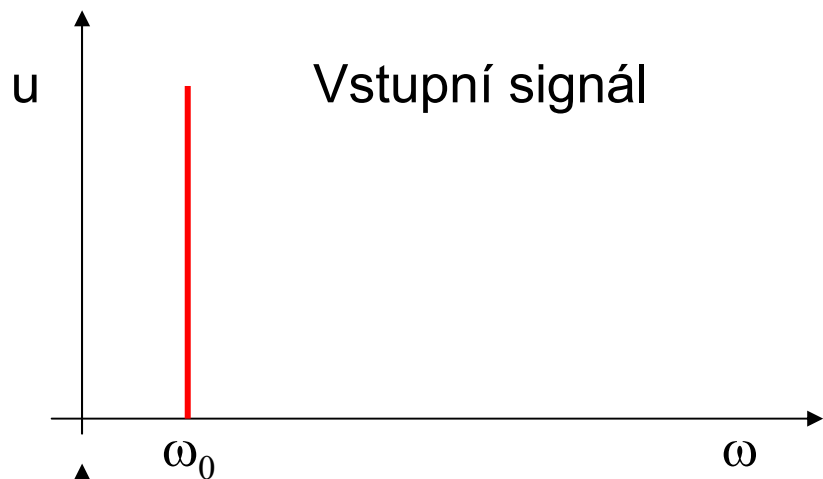
Filtr, zde dolní propust, můžeme popsat též spektrálně, mluvíme o spektrální přenosové charakteristice. V případě RC filtru je úhlový kmitočet zlomu $\omega_m = 1/(RC)$. V logaritmických souřadnicích je charakteristika lineární před a za kmitočtem zlomu, na tomto kmitočtu činí pokles 3 dB, sklon charakteristiky nad kmitočtem zlomu činí – 20 dB / dekádu.

Nelineární zkreslení signálu



Nelineární prvky, např. dioda způsobí vznik vyšších harmonických po průchodu harmonického signálu. Říkáme, že způsobí nelineární, harmonické zkreslení.

Nelineární zkreslení signálu



Zkreslený výstupní signál

Nelineární zkreslení signálu způsobené soustavou (např. zesilovačem) se vyjadřuje koeficientem harmonického zkreslení:

$$k_H = \frac{\sum_i U_i}{U_0}$$

Nebo odstupem vyšších harmonických, obvykle v dB:

$$\Delta_U = 20 \log (U_0 / U_{1(2, 3 \dots)})$$