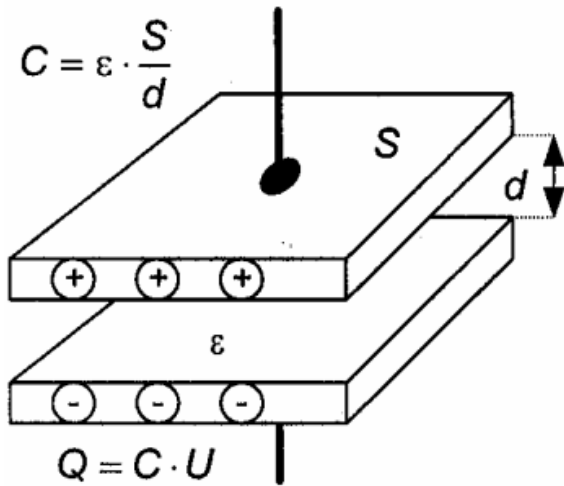


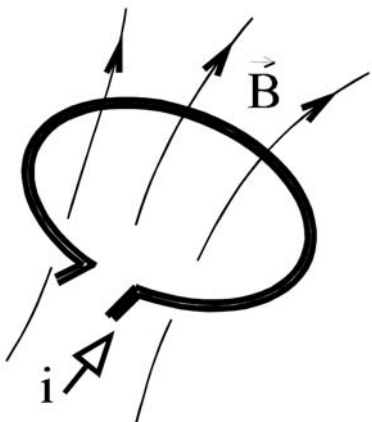
Kapacita, indukčnost;

kapacitor-kondenzátor, induktor-cívka



Kondenzátor je schopen uchovat energii v podobě elektrického náboje „Q“. Kapacita „C“ se udává ve Faradech [F].

Kapacita je úměrná ploše elektrod a nepřímo úměrná jejich vzdálenosti (a také úměrná permitivitě dielektrika – izolantu mezi elektrodami).



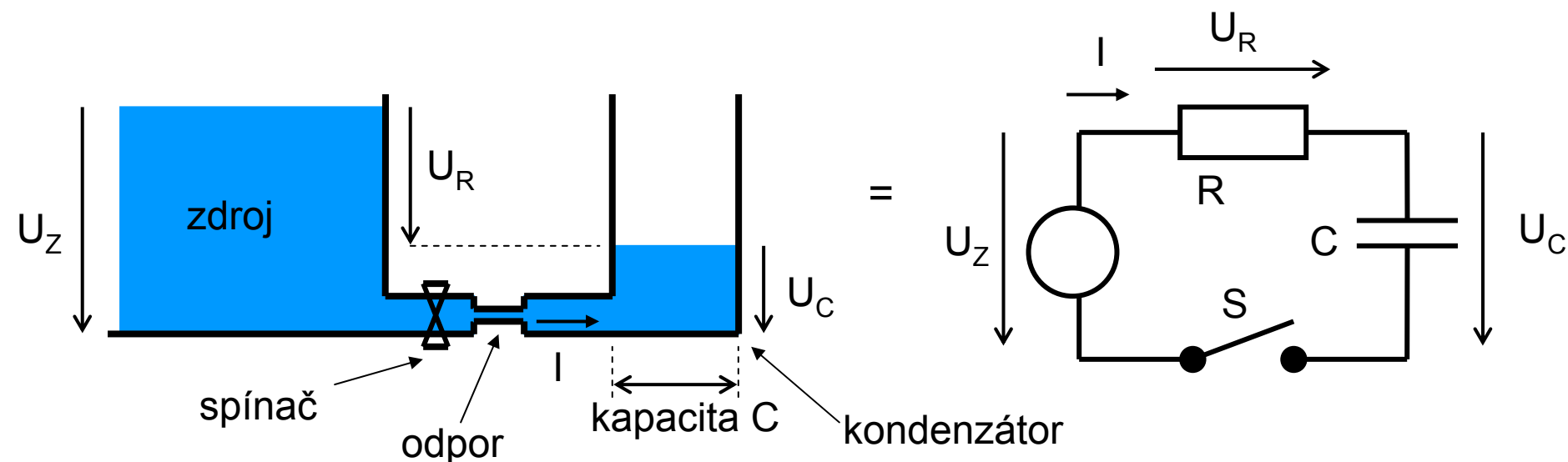
Obdobně cívka uchovává energii v podobě magnetického toku „ Φ “, který představuje tok vektoru magnetické indukce plochou „S“, plochou závitů vodiče.

Schopnost cívky akumulovat energii je indukčnost „L“, je to podíl magnetického toku a proudu, který jej vytvořil. Jednotkou indukčnosti je Henry [H].

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

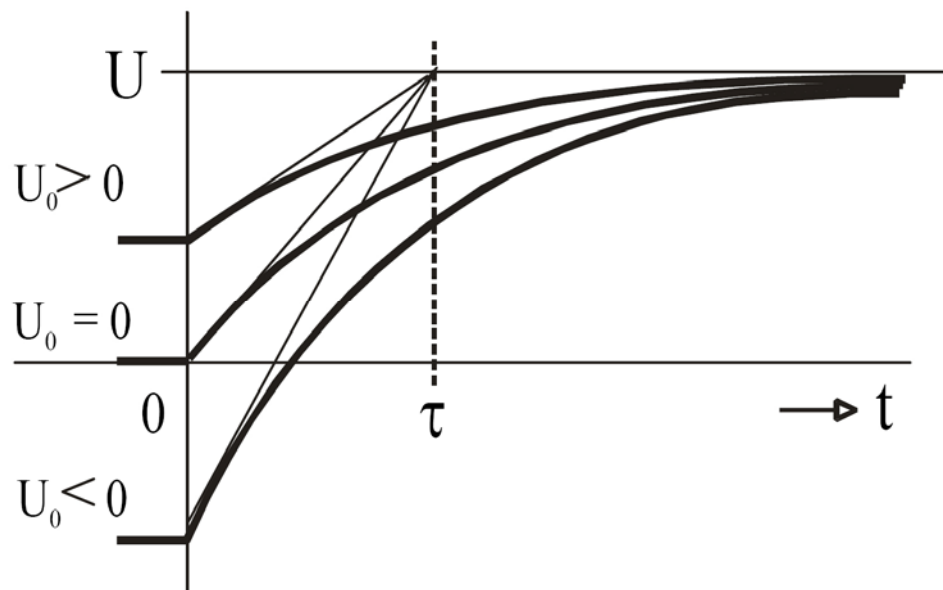
$$L = \frac{\Phi}{i}$$

Nabíjení kondenzátoru

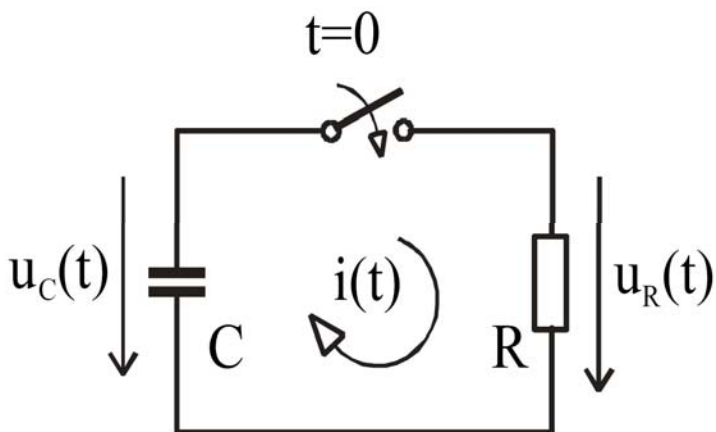


Nabíjení kondenzátoru lze přirovnat k napouštění nádoby. Kapacita kondenzátoru odpovídá ploše dna nádoby.

Rychlost nabíjení (časová konstanta τ) je dána kapacitou kondenzátoru a velikostí odporu omezujícího nabíjecí proud.



Vybíjení kondenzátoru



napětí v obvodu:

$$u_C(t) = u_R(t) = R \cdot i(t)$$

napětí na
kondenzátoru je
integrálem proudu:

$$u_C(t) = -\frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$\frac{1}{RC} \int u_C(t) dt + u_C(t) = 0$$

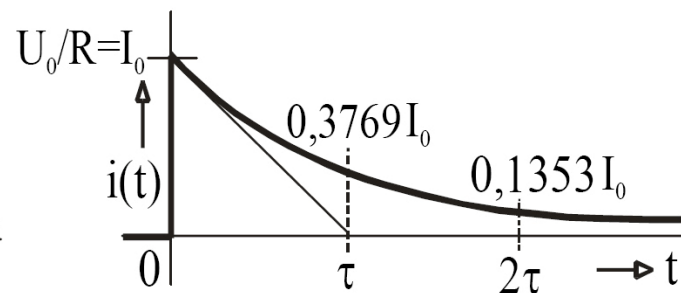
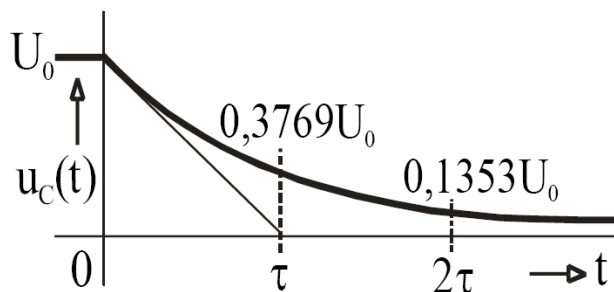
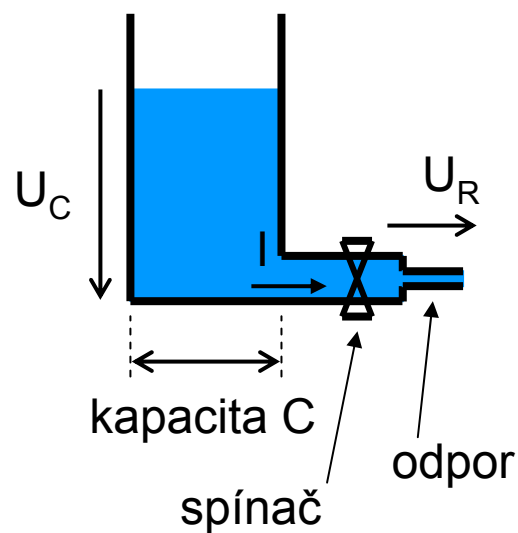
derivací získáme
diferenciální rovnici:

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_C(t) = 0$$

a její řešení pro napětí a proud:

$$u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau} \quad i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

kde:
 $\tau = RC$



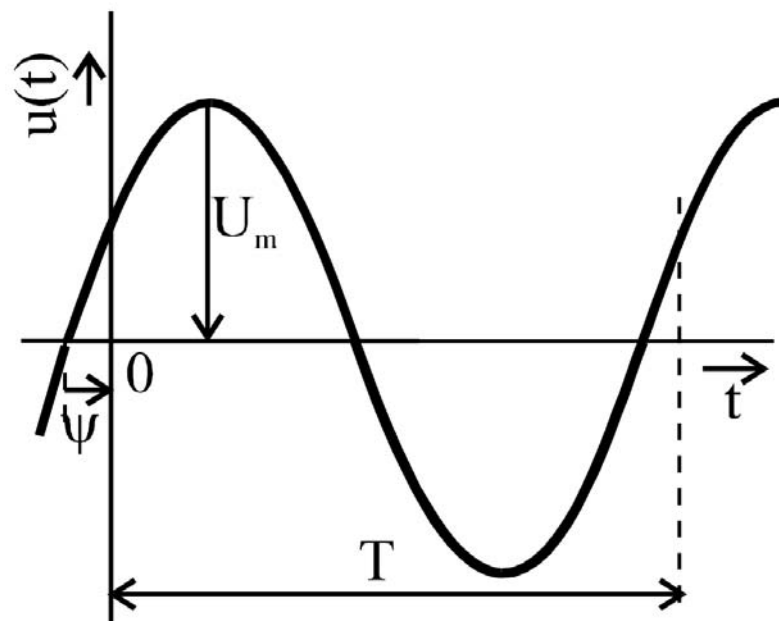
Střídavé napětí

Střídavé napětí mění periodicky svoji hodnotu.

Harmonický průběh popisujeme sinovou funkcí o periodě T v sekundách a frekvenci f , vyjádřené v kmitech za sekundu – Hertzích [Hz].

Platí: $f = 1 / T$

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi),$$



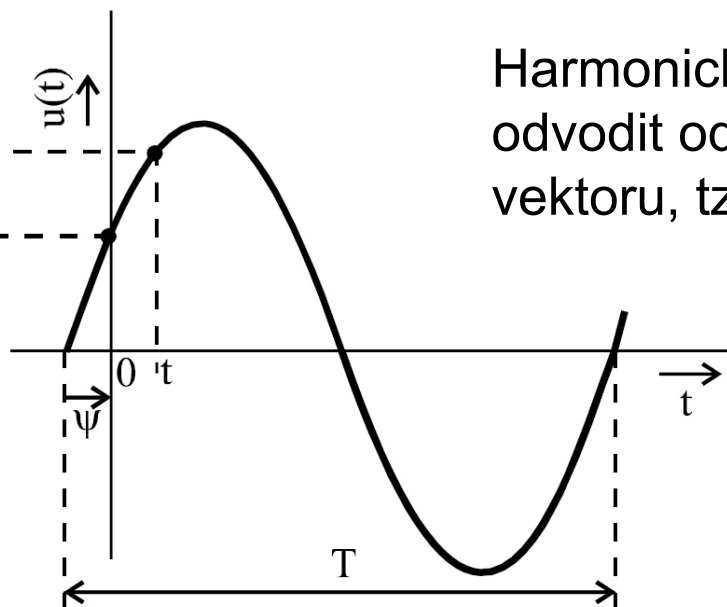
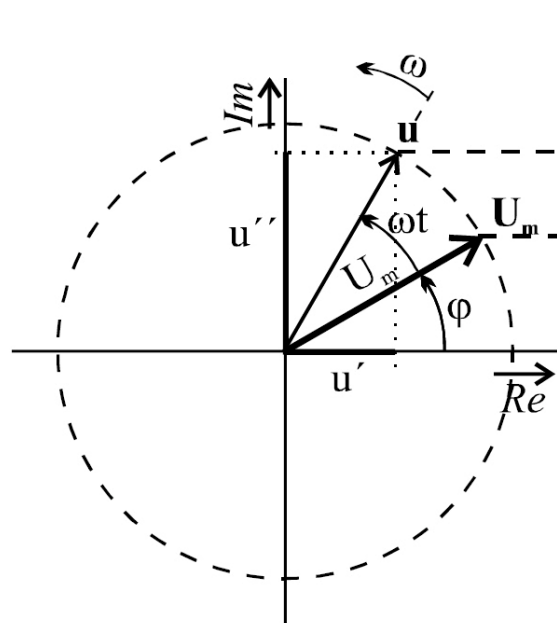
U_m amplituda (maximální hodnota), (V)

$\omega = 2\pi / T = 2\pi f$..úhlový kmitočet, (rad/s)

$\omega t + \psi$ okamžitá fáze, (rad)

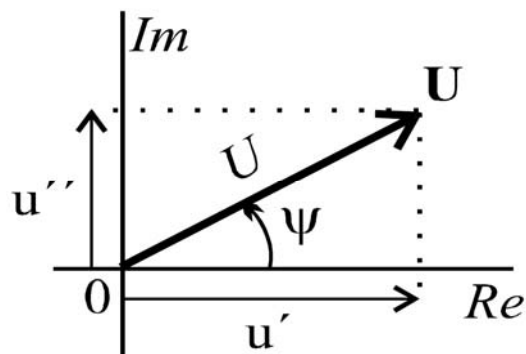
ψ počáteční fáze. (rad)

Střídavé napětí v komplexní rovině



Harmonický průběh lze odvodit od průmětu rotujícího vektoru, tzv. „fázoru“.

Pro popis fázoru se používá komplexní aritmetika.



reálná složka: $u' = \operatorname{Re}\{\mathbf{u}(t)\} = U_m \cos(\omega t + \psi)$

imaginární složka: $u'' = \operatorname{Im}\{\mathbf{u}(t)\} = U_m \sin(\omega t + \psi)$

fáze: $\psi = \arctg [\operatorname{Im}(\mathbf{U}) / \operatorname{Re}(\mathbf{U})] = \arctg (u'' / u')$

modul: $U = \sqrt{u'^2 + u''^2}$

Střídavé napětí a proud

$$\mathbf{u}(t) = u' + ju'' = \mathbf{U}_m \cdot e^{j\omega t} = U_m \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t} = U_m \cdot e^{j(\omega t + \psi)}$$

Složkový tvar

$$\mathbf{M} = a + jb$$

a – reálná část

b – imaginární část

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \varphi = \arctan \frac{b}{a}$$

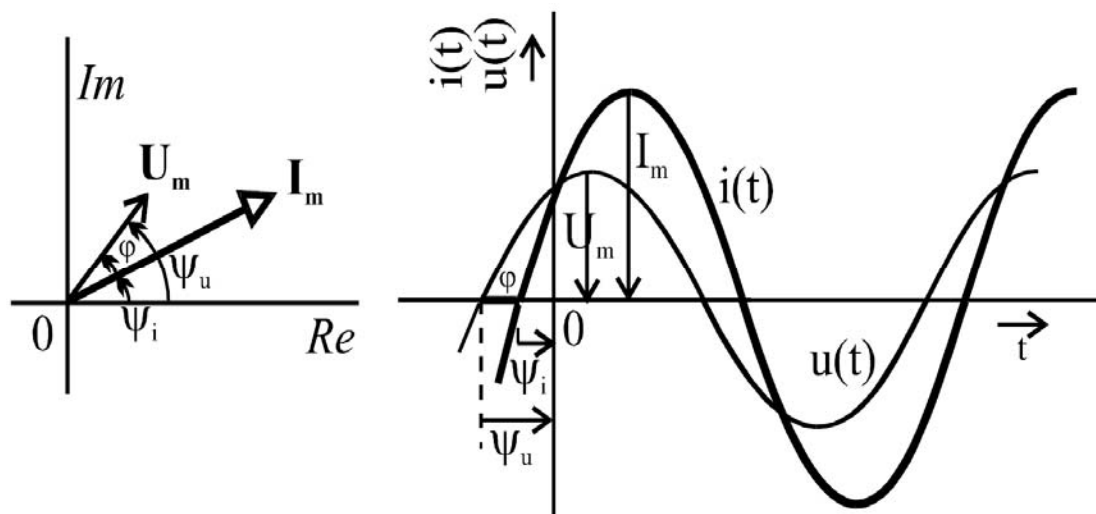
$$a = c \cdot \cos \varphi \quad b = c \cdot \sin \varphi$$

Polární tvar

$$\mathbf{M} = c \cdot e^{j\varphi}$$

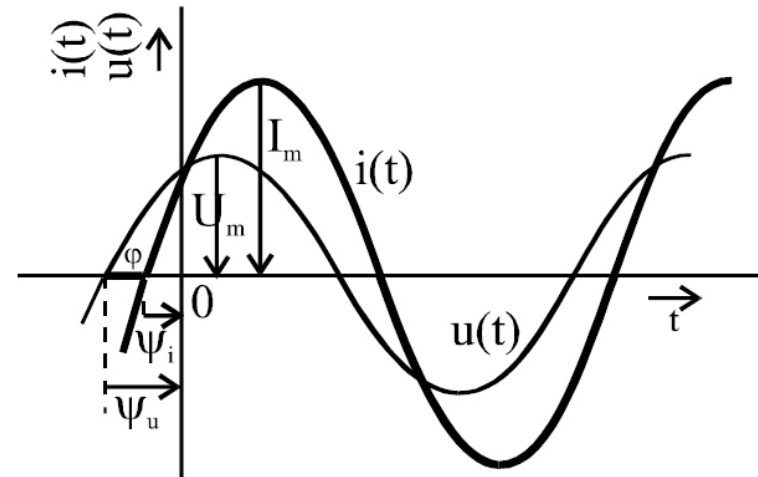
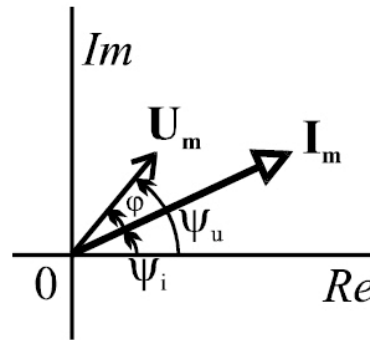
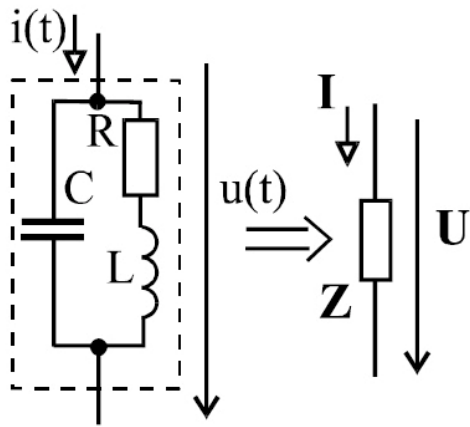
c – modul (absolutní hodnota)

φ – úhel, fáze



Význam vyjádření ve fázové rovině spočívá v možnosti popisu rozdílu mezi fází průběhu napětí a proudu, k čemuž dochází u kondenzátorů a cívek.

Impedance



U prvku, na němž dochází k rozdílu mezi fází napětí a proudu φ mluvíme o komplexní impedanci $\mathbf{Z}$.

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{U}_m}{\mathbf{I}_m} = \frac{U_m}{I_m} \cdot e^{j(\psi_U - \psi_I)} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

Reálná složka má charakter odporu R , imaginární X se nazývá reaktance.

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

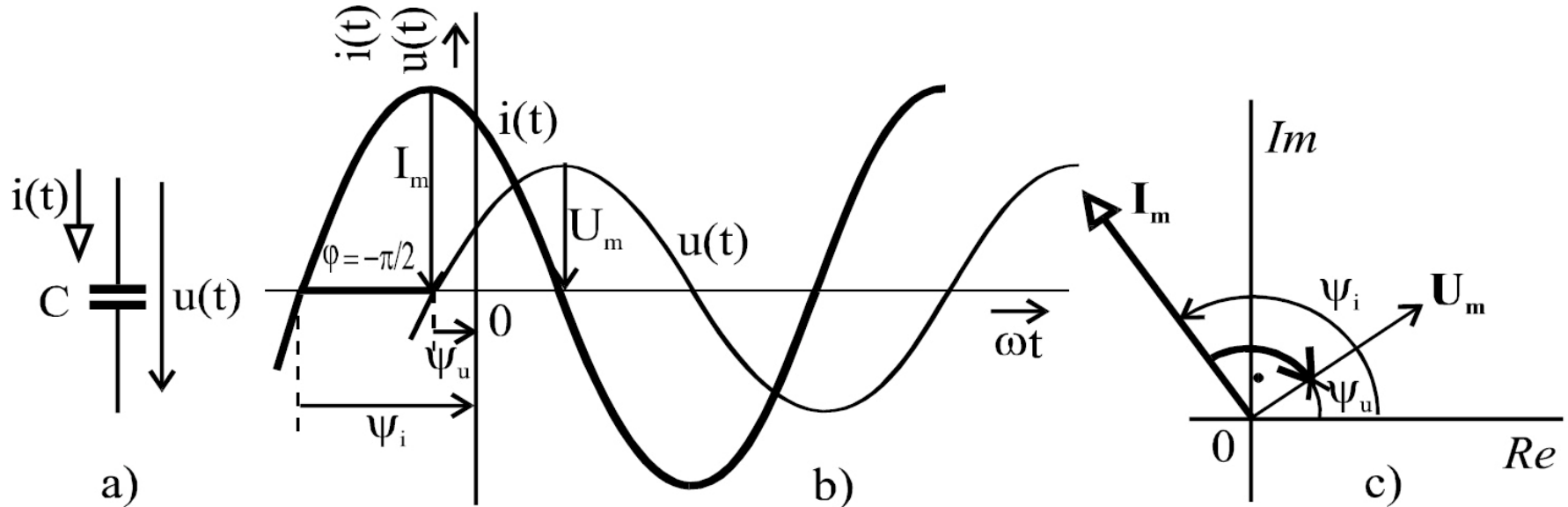
Ohmův zákon v obvodech střídavého proudu bude mít komplexní tvar:

$$\mathbf{U}_m = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}_m, \quad \mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

Převrácená hodnota impedance se nazývá admitance $\mathbf{Y}$.

$$\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$$

Kondenzátor v obvodu střídavého proudu



Okamžitá hodnota napětí **na kondenzátoru** je rovna

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt .$$

Proto můžeme pro okamžitou hodnotu napětí psát

$$u(t) = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2})$$

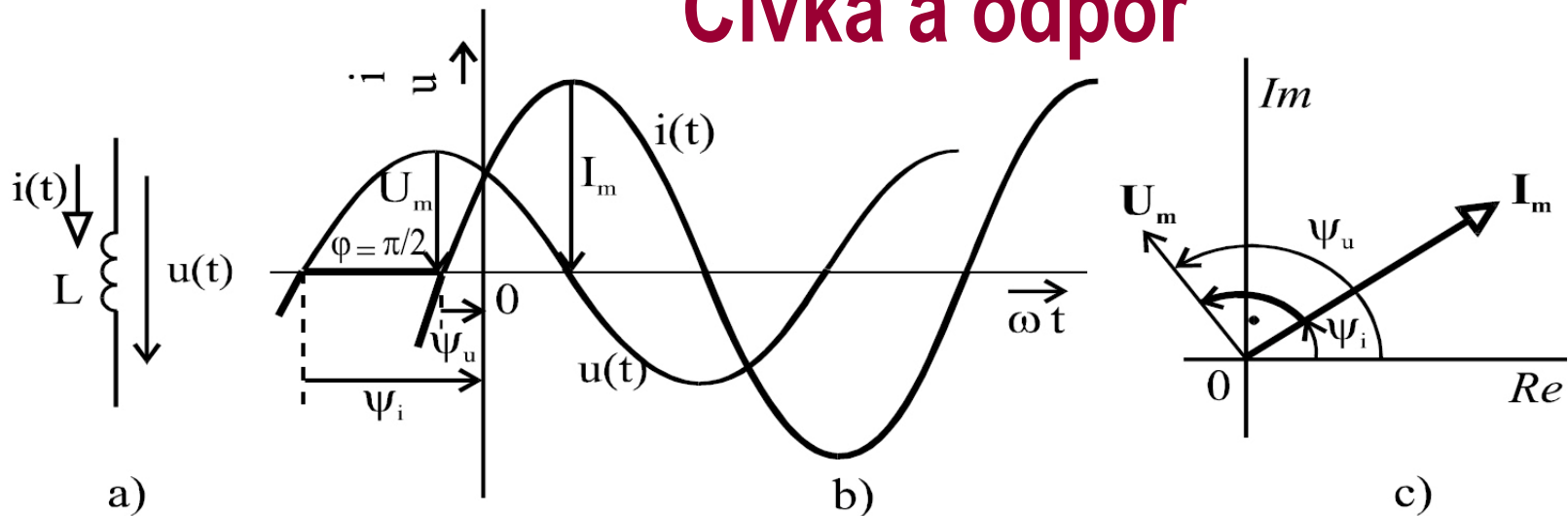
a pro fázory napětí

$$U_m = \frac{1}{j\omega C} I_m, \quad U = \frac{1}{j\omega C} I.$$

Napětí na kondenzátoru (kapacitoru) je integrálem proudu.

Řešením diferenciální rovnice závislosti napětí na proudu v čase získáme tvar s posuvem $-\pi/2$ napětí vůči proudu. To lze vyjádřit v komplexní rovině.

Cívka a odpor



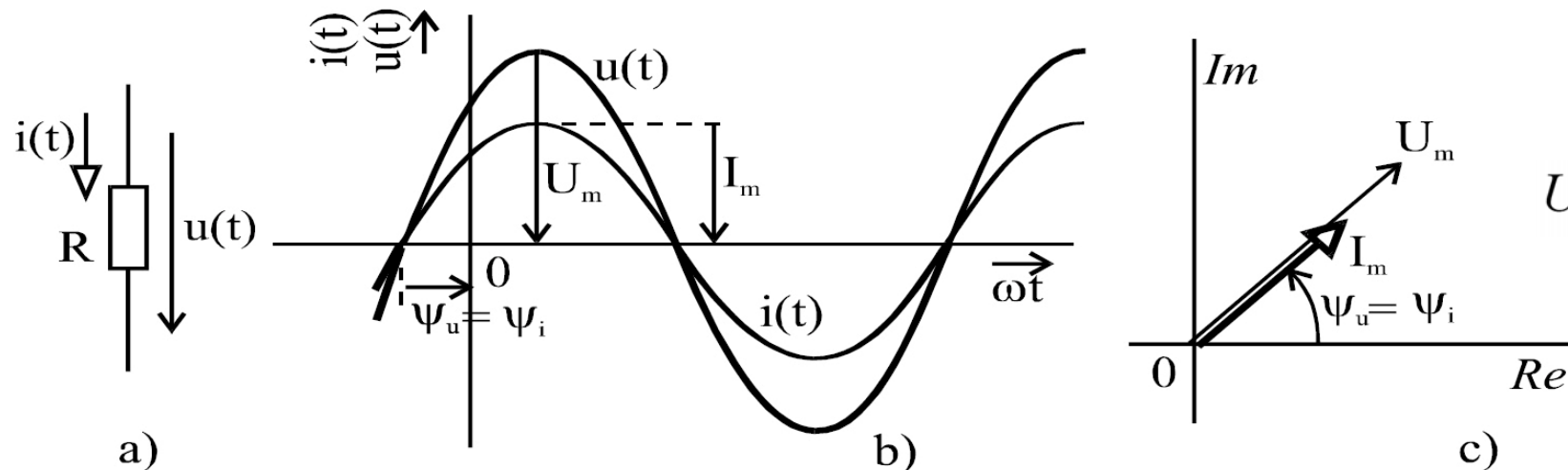
Okamžitá hodnota napětí **na induktoru** je úměrná rychlosti změny proudu

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} [I_m \sin(\omega t + \psi_i)] = \omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}).$$

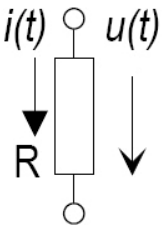
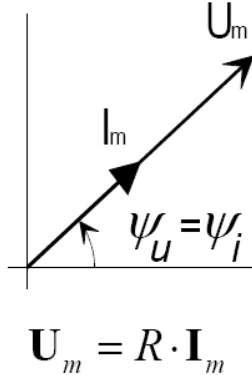
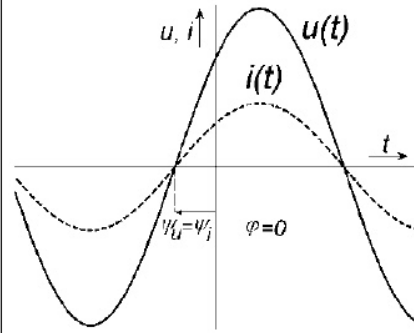
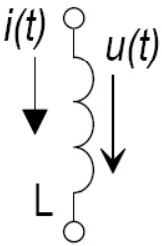
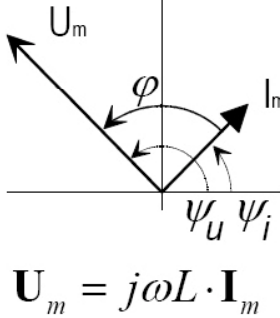
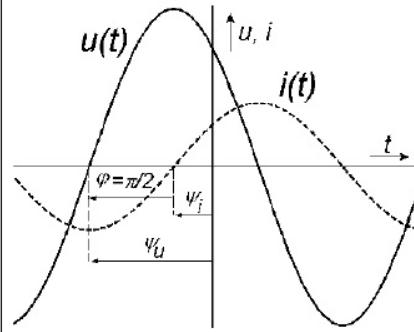
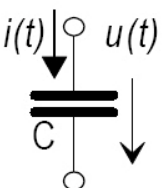
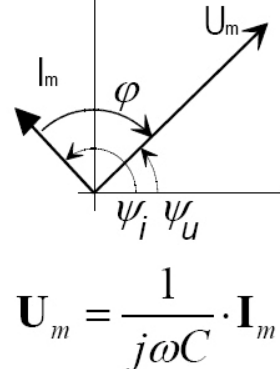
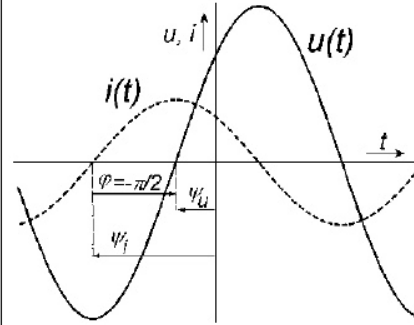
$$\mathbf{U}_m = j\omega L \mathbf{I}_m$$

resp. $\mathbf{U} = j\omega L \mathbf{I}$

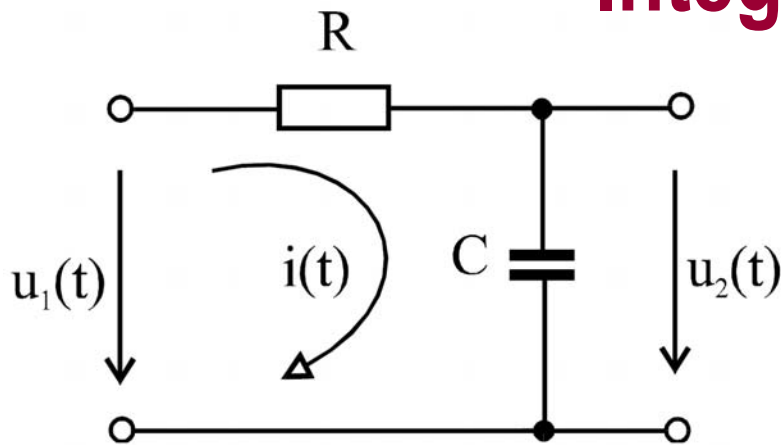
Amplituda napětí je úměrná amplitudě proudu (jde o lineární prvek)



Odpor, kondenzátor a cívka – přehled

Prvek	Okamžité hodnoty	Amplitudy, fáze	Z	Fázorový diagram	Časový diagram
	$u(t) = R \cdot i(t)$	$U_m = R \cdot I_m$ $\varphi = 0$	R	 $U_m = R \cdot I_m$	
	$\Phi(t) = L \cdot i(t)$ $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$U_m = \omega \cdot L \cdot I_m$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$	$j\omega L$	 $U_m = j\omega L \cdot I_m$	
	$q(t) = C \cdot u(t)$ $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	$U_m = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_m$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{j\omega C}$	 $U_m = \frac{1}{j\omega C} \cdot I_m$	

Integrační RC člen



Napětí na kondenzátoru je integrálem proudu.

$$u_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Pro malé U_2 (lineární část exponenciály) lze zjednodušeně psát:

$$u_2(t) \doteq \frac{1}{RC} \int u_1(t) dt$$

Integrační RC člen je dělič sestávající z odporu a kondenzátoru. Dělí napětí v poměru, kterému říkáme přenos. Je to podíl výstupního napětí U_2 a vstupního U_1 :

$$\frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

Na RC členu dochází k posuvu fáze napětí a proudu, přenos je tedy komplexní veličinou, navíc závislou na kmitočtu. Lze vyjádřit samostatně modul (K) a fázi (φ) přenosu.

$$K_u(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(-\omega RC)$$

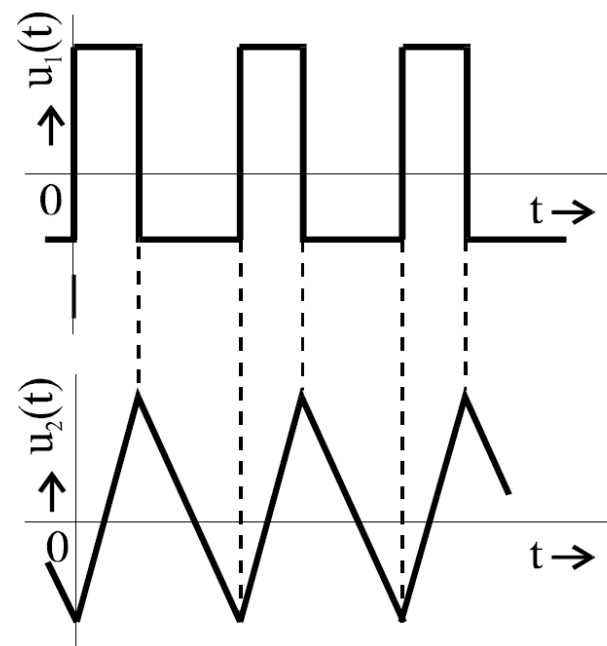
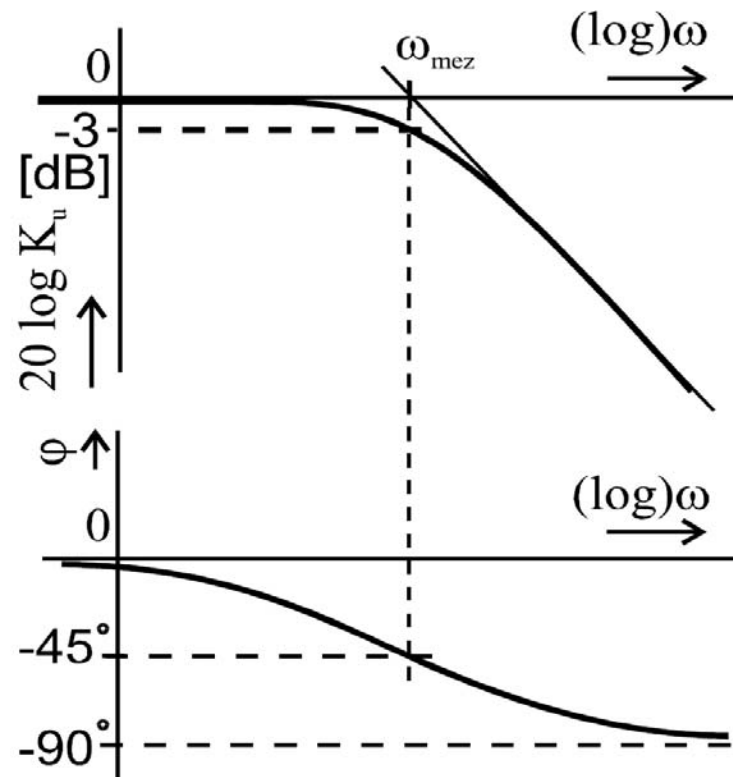
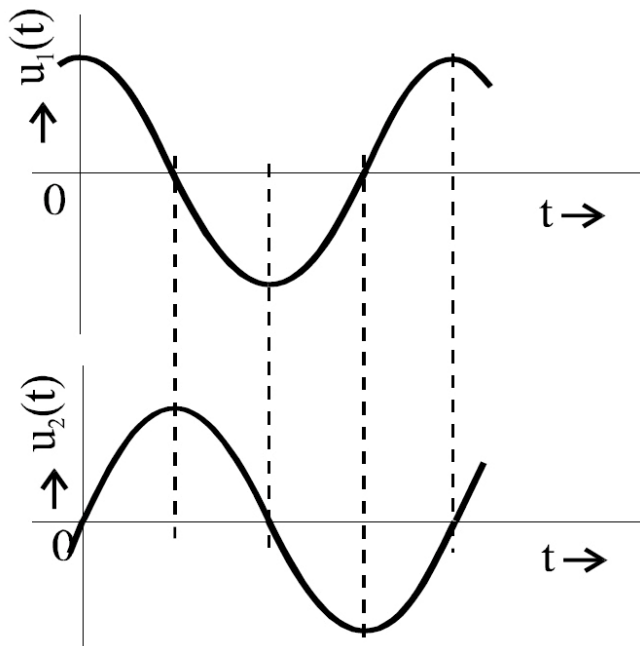
Chování integračního RC členu

Závislost modulu a fáze přenosu na kmitočtu říkáme frekvenční charakteristika. Vyjadřuje se v logaritmických souřadnicích. Přenos navíc obvykle v decibelech [dB].

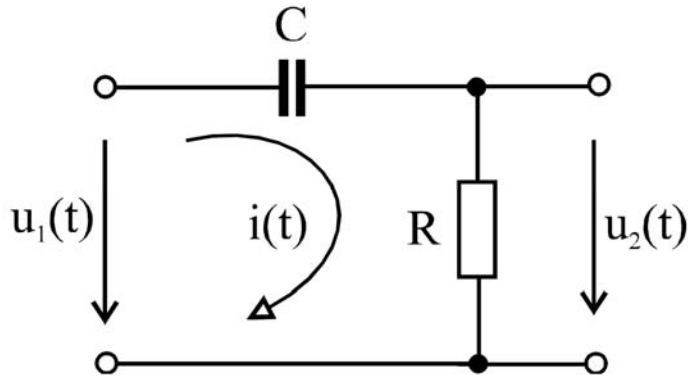
$$\omega_{mez} = 1 / RC = 1 / \tau$$

Pro kmitočty nad mezním kmitočtem přenos klesá se sklonem 20 dB/dekádu.

Integrační RC člen se chová jako kmitočtová „dolní propust“, odfiltruje vyšší kmitočty.



Derivační RC člen – horní propust



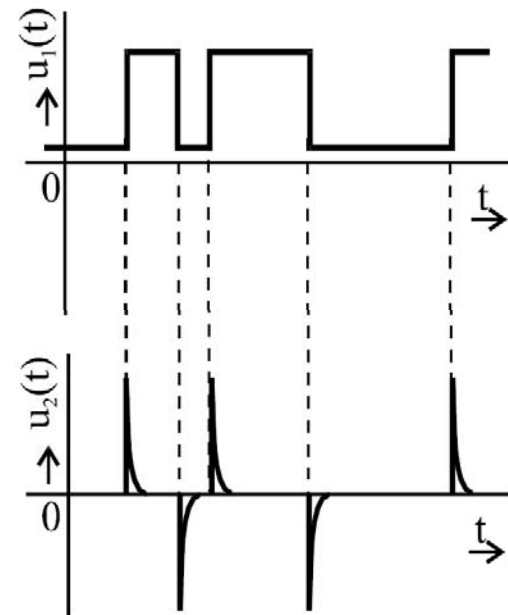
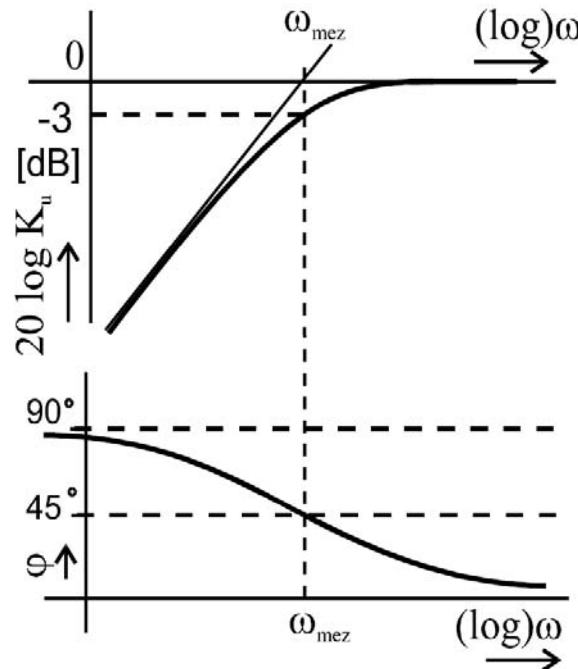
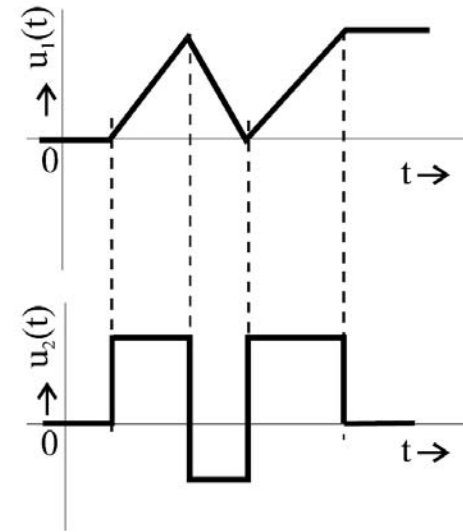
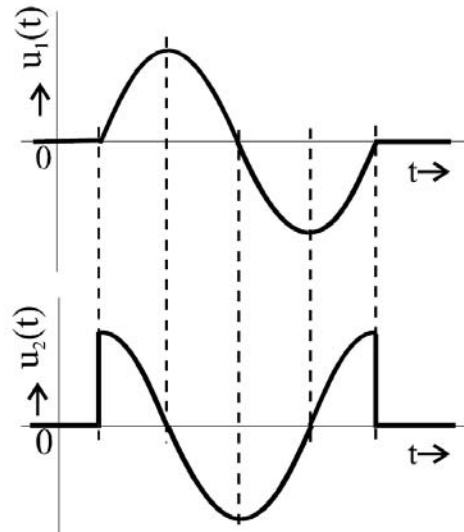
$$u_2(t) = R \cdot i(t) = RC \frac{d}{dt} [u_1(t) - u_2(t)]$$

$$u_2(t) \doteq RC \frac{du_1(t)}{dt}$$

Derivační RC člen se chová jako „horní propust“, odfiltruje nižší kmitočty.

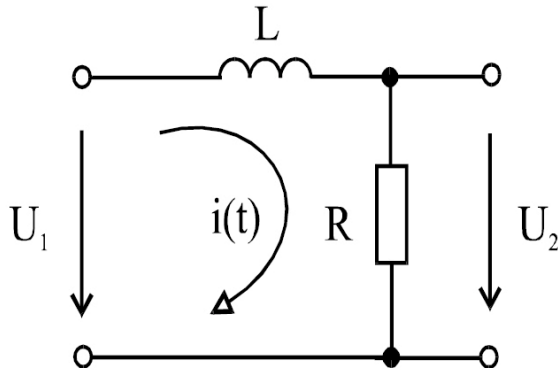
$$K_u(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctg \omega RC$$



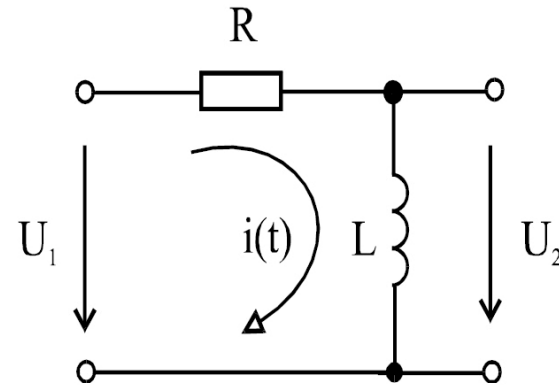
integrační a derivační RL členy

Obdobně fungují integrační a derivační členy jako děliče R-L s cívkou, vše se chová zrcadlově obráceně.



Integrační RL člen a jeho přenos:

$$\mathbf{K}_u(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$



Derivační RL člen a jeho přenos:

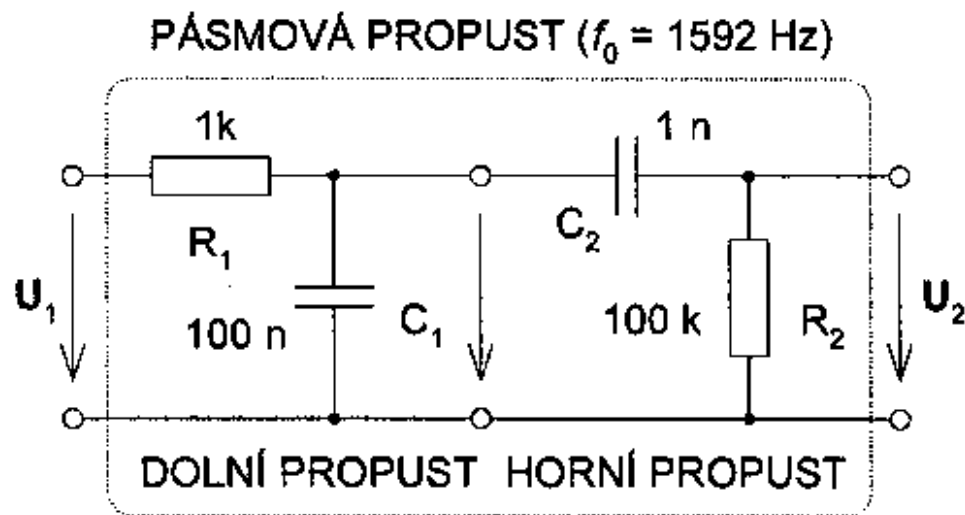
$$\mathbf{K}_u(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

Časová konstanta RL členu (a převrácená hodnota mezního kmitočtu):

$$\tau = \frac{L}{R}$$

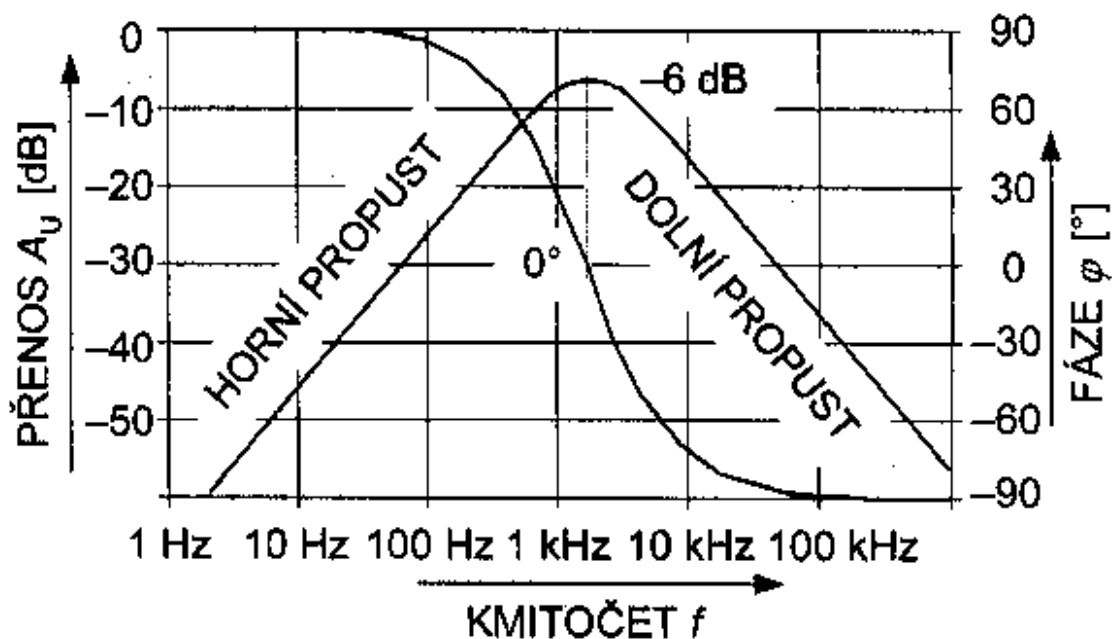
Kmitočtový filtr – pásmová propust

Kombinací dolní a horní propusti lze vytvořit pásmovou propust, která propouští jen určitou oblast kmitočtů (pásmo).

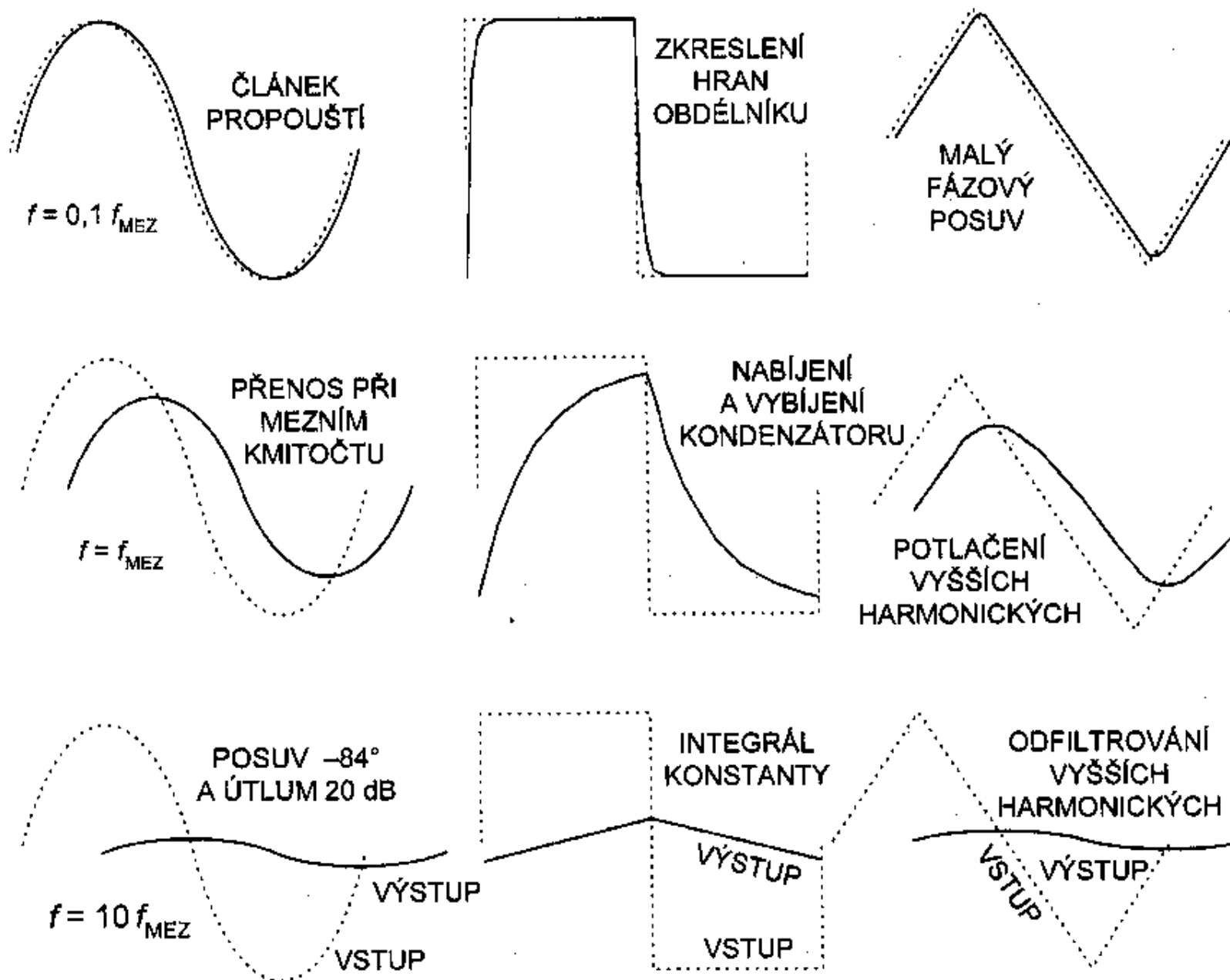


Kmitočtová charakteristika modulu a fáze přenosu pásmové propusti:

Sofistikovanějším zapojením lze dosáhnout vyšší strmosti (selektivity) propusti, takže účinněji filtruje zvolené pásmo.



Dolní propust – integrační člen, časové průběhy



Horní propust – derivační člen, časové průběhy

