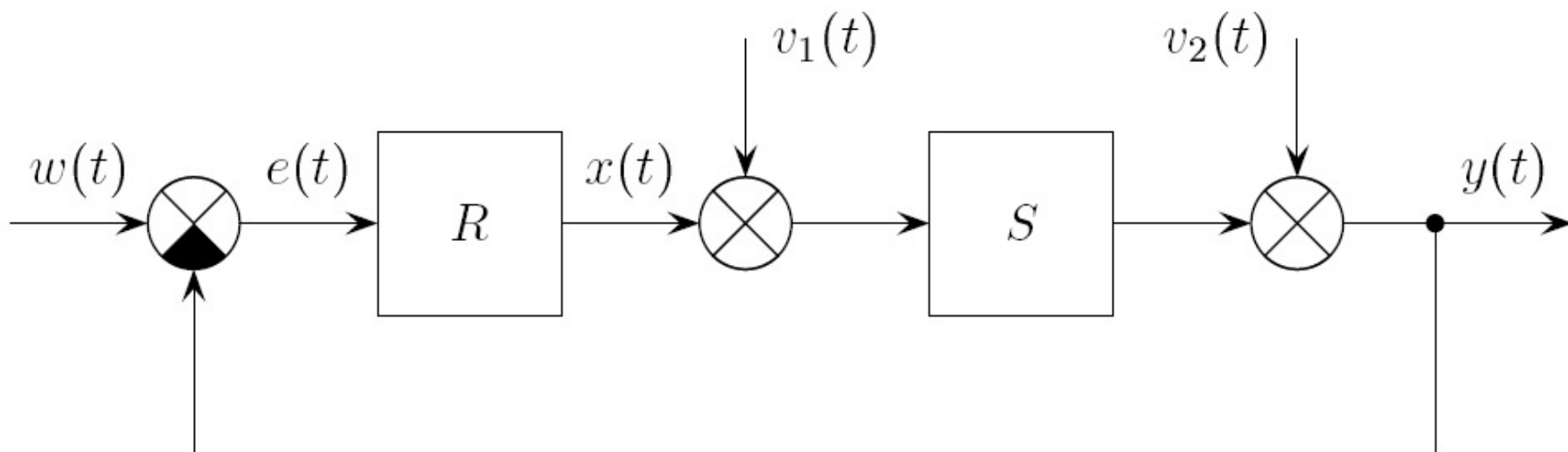
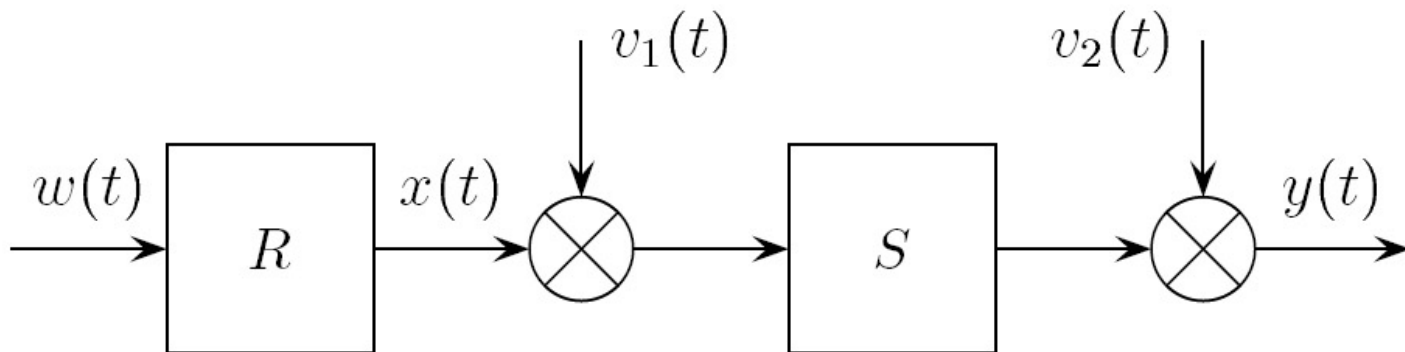
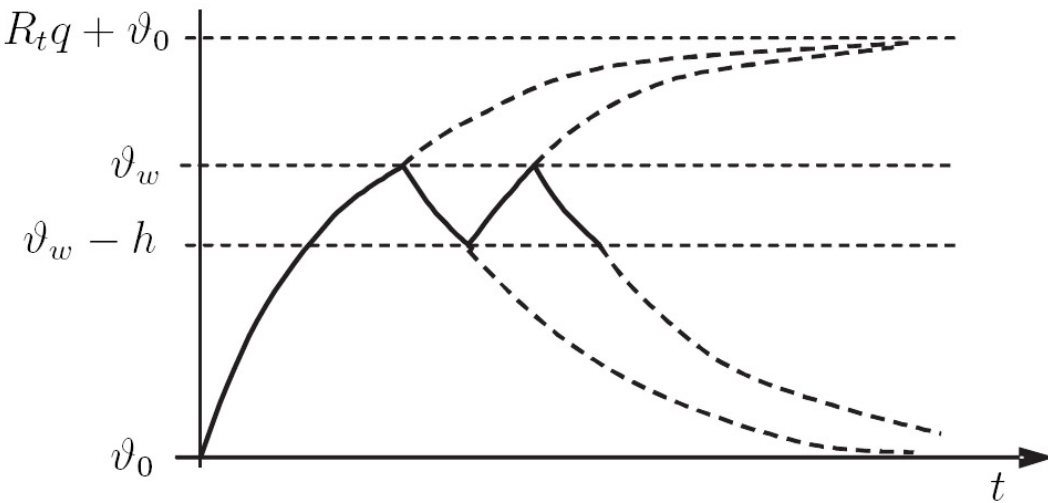


# Regulace a ovládání

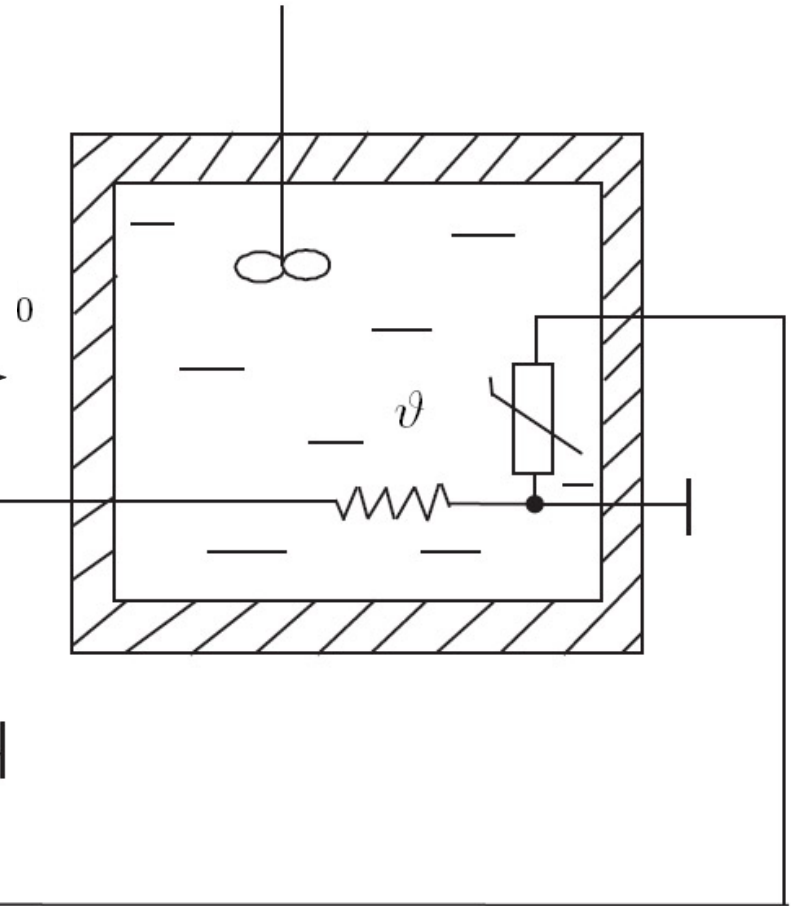
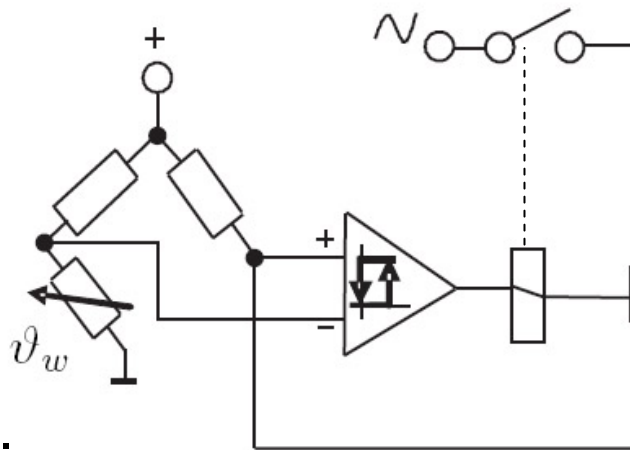


Regulace soustavy „S“ se od ovládání liší přítomností zpětné vazby, která dává informaci o stavu soustavy regulátoru „R“, který podle toho upravuje akční zásah do soustavy, aby bylo dosaženo kýženého stavu.

# Nejjednodušší, tzv. „bang-bang“ regulace

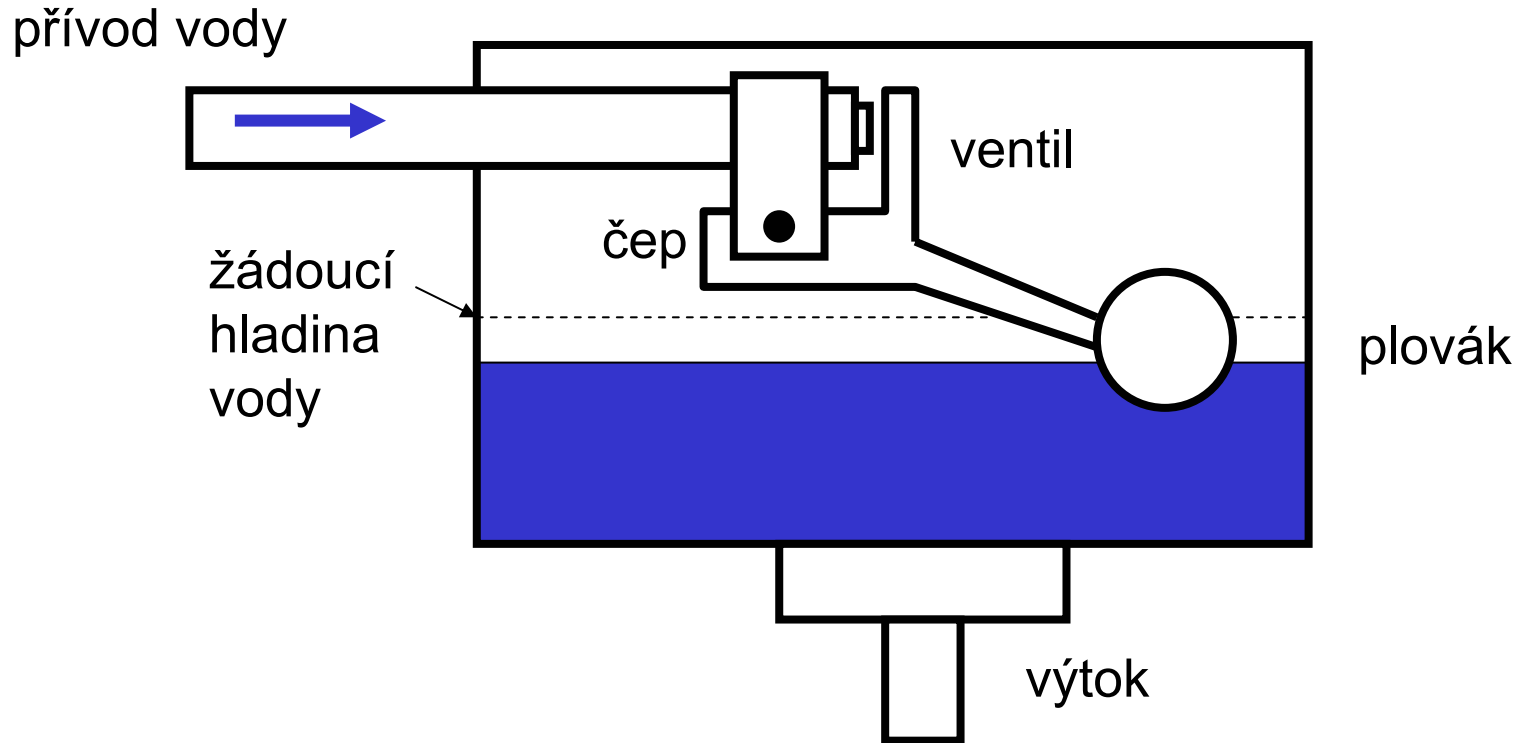


Dvoustavový, tzv. bang-bang regulátor je spínač, který sepne, je-li dosaženo nějaké hodnoty.



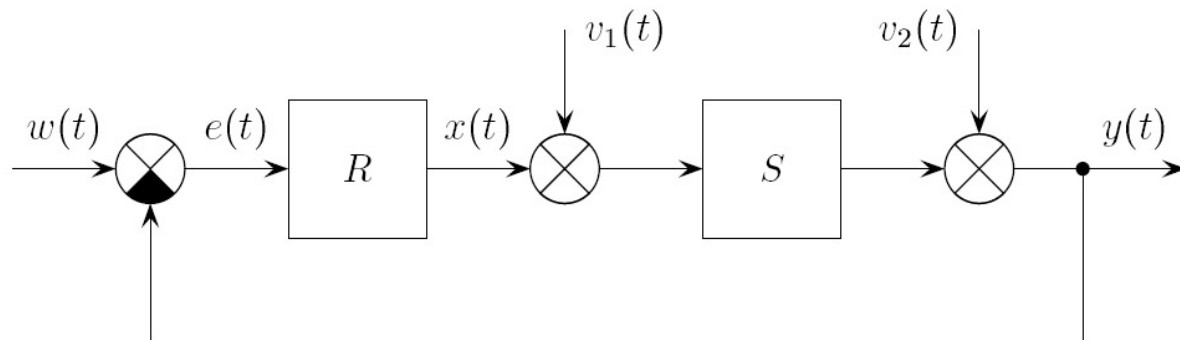
Příkladem je např. bimetalový spínač v žehličce. Výsledkem takové regulace je, že regulovaná veličina (zde teplota) kolísá kolem žádané hodnoty v rozmezí daném hysterzi, nebo zpožděním čidla.

# Spojitá regulace



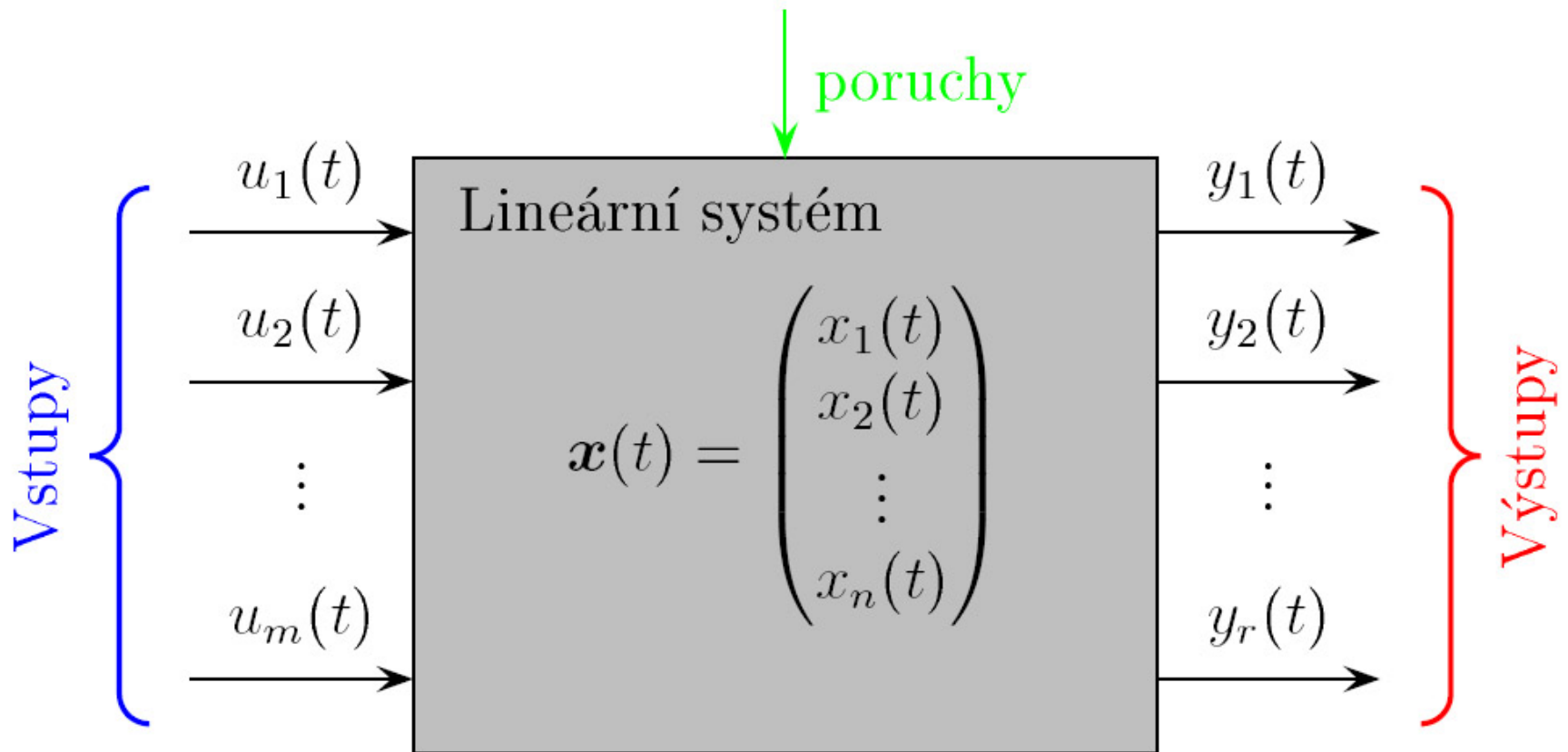
Záchodové splachovadlo je nejjednodušším příkladem spojitého regulátoru. Proud přitékající vody je omezen, nebo úplně zavřen ventilem ovládaným přes páku plovákem. Když záchod trochu teče, plovák udržuje ventil mírně pootevřený a pouští malý pramínek přitékající vody, který přesně kompenzuje odtok. Hladina se udržuje na konstantní hodnotě a nekolísá.

# Základní pojmy



- **regulovaná veličina** je výstupní veličina řízeného systému (obvyklé značení je  $y$ )
- **řídící veličina**, též žádaná hodnota nebo vstupní veličina; hodnota a časový průběh této proměnné určuje jaká má být hodnota a časový průběh regulované veličiny (obvykle se značí  $w$ )
- **regulační odchylka** je rozdíl mezi žádanou hodnotou a regulovanou veličinou (obvykle se značí  $e$ , a platí  $e = w - y$ )
- **akční veličina**, též regulační veličina, je vstupní veličina regulované soustavy a výstupní veličina regulátoru; obvykle ji značíme  $u$  (někdy také  $x$ )
- **porucha** je veličina, která působí buď na vstupu, výstupu nebo na libovolném místě regulované soustavy. V praxi může na jednu soustavu působit několik poruch v různých místech. (V rámci tohoto kurzu budeme uvažovat pouze signálové poruchy, parametrické poruchy, čili změny vlastností regulované soustavy budou probírány později). Signálové poruchy obvykle značíme  $v$ .

# Stavový popis v regulační technice



Lineární soustavy se popisují diferenciálními rovnicemi. V nejobecnější podobě lze soustavu libovolného řádu s  $m$  vstupy a  $r$  výstupy popsat dvěma soustavami diferenciálních rovnic.

# Rovnice ve stavovém prostoru

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1(t) + \cdots a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + b_{1m}u_m(t)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1(t) + \cdots a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + b_{2m}u_m(t)$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1(t) + \cdots a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + b_{nm}u_m(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$y_1 = c_{11}x_1(t) + \cdots c_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + d_{1m}u_m(t)$$

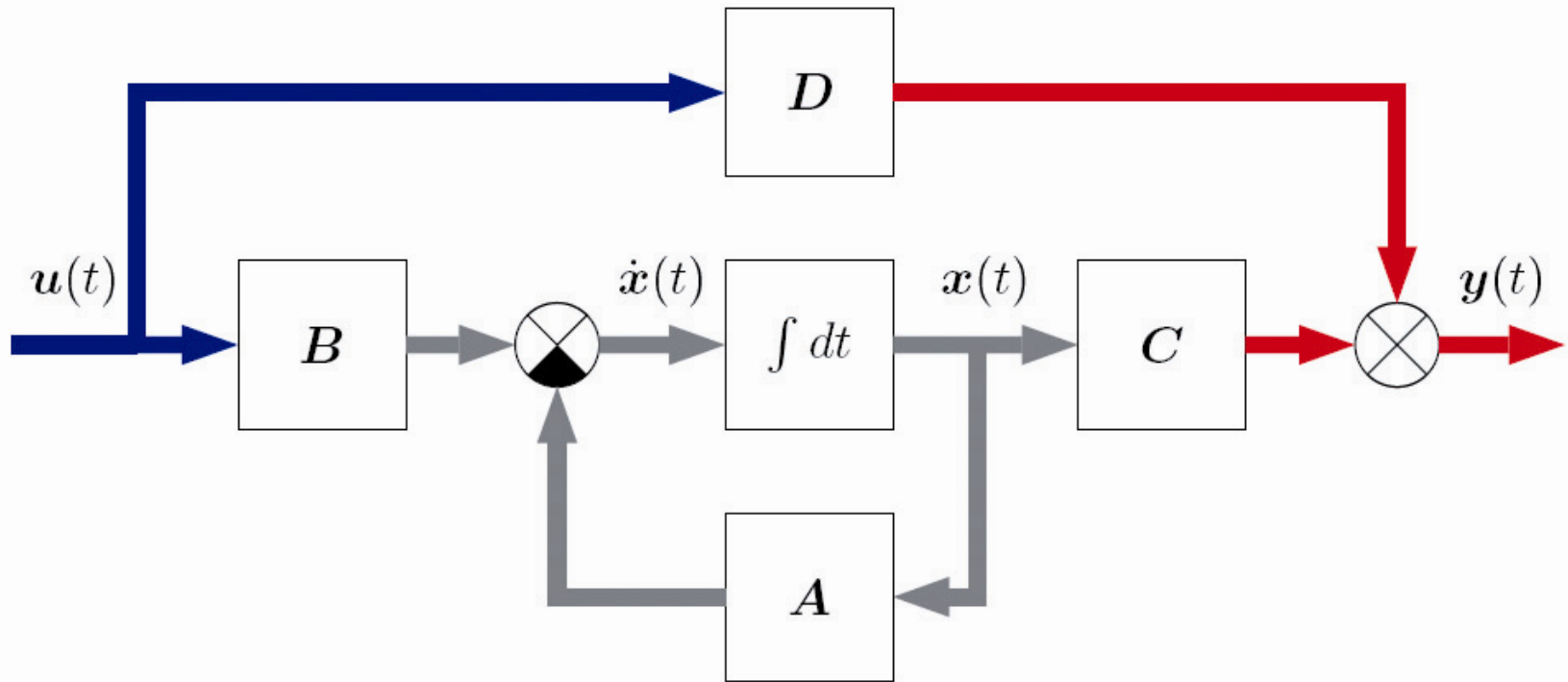
$$y_2 = c_{21}x_1(t) + \cdots c_{2n}x_n(t) + d_{21}u_1(t) + d_{2m}u_m(t)$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$y_r = c_{r1}x_1(t) + \cdots c_{rn}x_n(t) + d_{r1}u_1(t) + d_{rm}u_m(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

# Význam matic ve stavovém prostoru



Matice koeficientů  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  mají následující význam

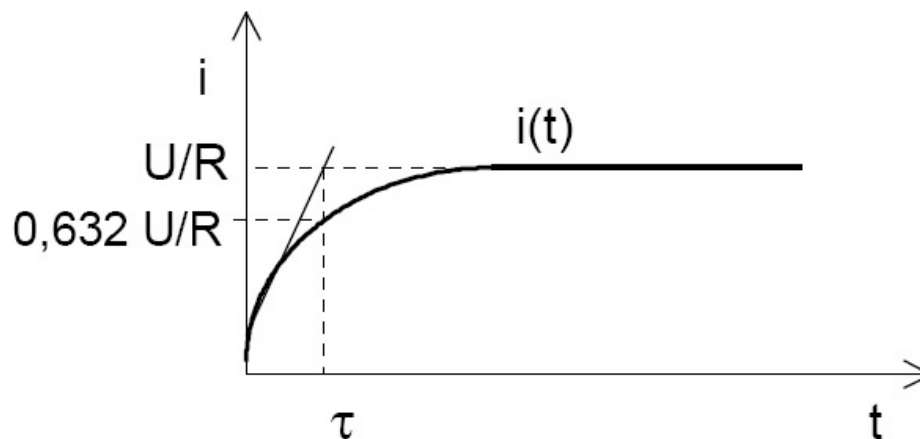
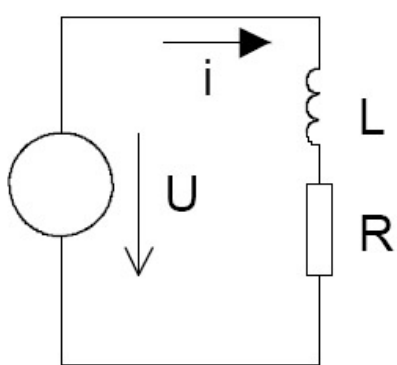
$A$  je matice vnitřních vazeb systému (též systémová matice nebo matice zpětných vazeb). Má rozměr  $n \times n$

$B$  je matice vazeb systému na vstup (též vstupní matice). Má rozměr  $n \times m$ .

$C$  je matice vazeb výstupu na stav (též výstupní matice). Má rozměr  $r \times n$ .

$D$  je matice přímých vazeb výstupu na vstup (též výstupní matice). Má rozměr  $r \times m$ . Z hlediska dynamických vlastností nejsou tyto vazby podstatné a v řadě případů je tato matice nulová.

# Popis soustavy 1. řádu



$$U = Ri + L \frac{di}{dt}$$

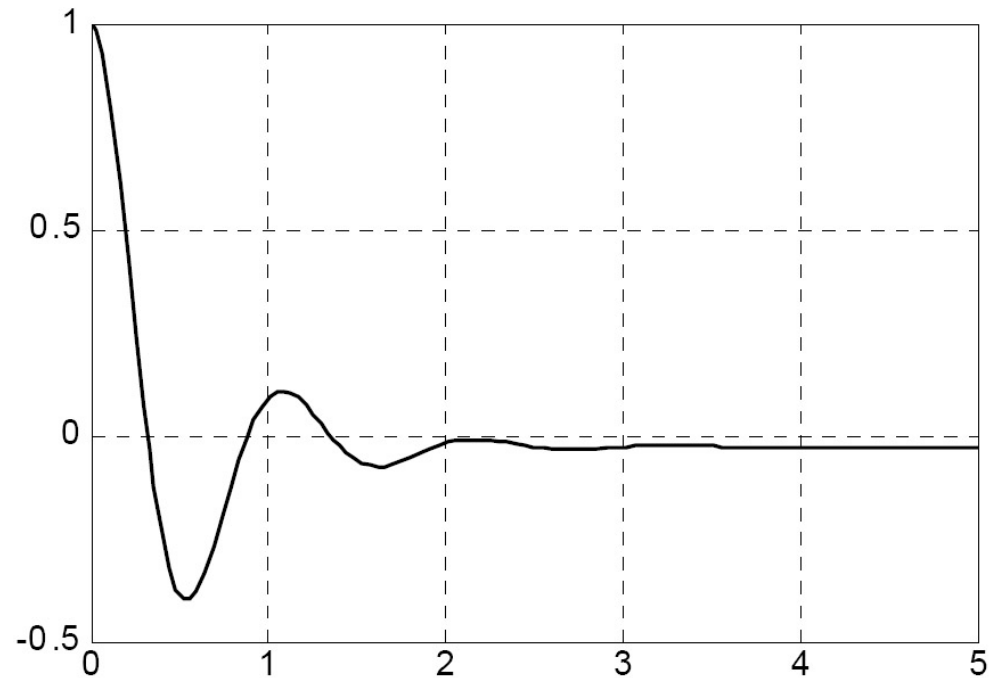
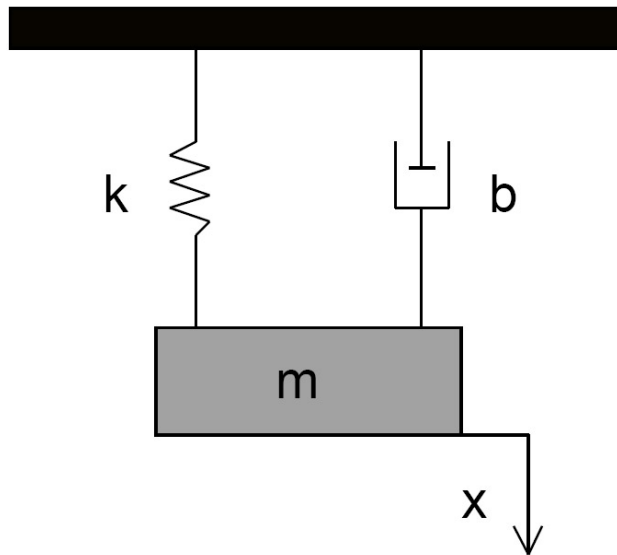
$$i(0) = 0$$

$$i = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Příklad soustavy 1. řádu, tzv. setrvačného členu. Obvod s cívkou a odporem, po sepnutí narůstá proud exponenciálně s časovou konstantou  $\tau$ . Obvod lze popsat diferenciální rovnicí 1. řádu a jednou počáteční podmínkou. Řešení je zde možné analyticky. Výsledkem je popis časového průběhu proudu odporem. Lze ukázat, že časová konstanta  $\tau$  odpovídá okamžiku, kdy veličina dosáhne 0,632 konečné hodnoty po ustálení děje. Toho lze využít při identifikaci soustav.

# Soustava 2. řádu



$$m \ddot{x} = -kx - b \dot{x}$$

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} (a \sin \omega t + b \cos \omega t)$$

Příkladem soustavy 2. řádu může být těleso na pružině s tlumením, např. kolo u auta s pérem a tlumičem. Řešením soustavy může být kmitavý děj, nebo i průběh bez překmitu, je-li tlumení velké. Závaží se ustálí, vyrovnají-li se tíhová síla a tah pružiny.

# Řešení regulačních soustav

- ♦ analytické řešení (je vhodné jen pro rovnice 1. a 2. řádu)
- ♦ numerické řešení s využitím počítače
- ♦ pomocí operátorového počtu (Laplaceovou transformací)

Pro Laplaceovu transformaci derivací platí

$$L[x'(t)] = pX(p) - x_+(0) \quad , \quad L[x''(t)] = p^2X(p) - px(0) - x'(0) \quad , \quad \text{atd.}, \text{ až}$$

$$L[p^{(n)}] = p^n X(p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2}x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0)$$

Poznámka: Jsou-li všechny počáteční podmínky nulové, lze jednoduše psát

$$\frac{d}{dt} \rightarrow p, \quad \frac{d^2}{dt^2} \rightarrow p^2, \quad \frac{d^3}{dt^3} \rightarrow p^3, \quad \text{atd.}$$

V regulační technice je tradičně používán popis soustav prostřednictvím operátorového počtu - Laplaceovy transformace, která převádí diferenciální rovnice na polynomiální.

# Laplaceova transformace

Lineární soustava  $n$ -tého řádu je popsána diferenciální rovnicí

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_2 y' + a_1 y = b_{m+1} r^{(m)} + b_m r^{(m-1)} + \dots + b_2 r' + b_1 r$$

ve které je  $y(t)$  výstup,  $r(t)$  vstup a  $a_i, b_j$  jsou reálné konstanty.

Předpokládáme-li všechny počáteční podmínky nulové, dostaneme po Laplaceově transformaci algebraickou rovnici

$$Y(p)(p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1) = R(p)(b_{m+1} p^m + b_m p^{m-1} + \dots + b_2 p + b_1)$$

Přenosová funkce  $F(p)$  je pak definována jako poměr výstupu  $Y(p)$  a vstupu  $R(p)$ :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{b_{m+1} p^m + b_m p^{m-1} + \dots + b_2 p + b_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1}$$

Přenosová funkce je tedy dána zlomkem, v němž čítec i jmenovatel jsou polynomy komplexní proměnné  $p$ , kde  $p = \sigma + j\omega$ . Jestliže rozložíme oba polynomy na součiny kořenových činitelů, dostaneme přenosovou funkci ve tvaru

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

ve které  $p_1, p_2, \dots, p_n$  jsou tzv. póly přenosové funkce a  $z_1, z_2, \dots, z_m$  jsou nuly přenosové funkce  $F(p)$ . Pro  $p = p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  je hodnota přenosové funkce  $F(p) \rightarrow \infty$ , pro  $p = z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  je hodnota přenosové funkce  $F(p) = 0$ .

# Přenosové funkce

$$F_1(p) = \frac{k}{Tp + 1} e^{-dp}$$

soustava prvního řádu s dopravním zpožděním

$$F_2(p) = \frac{k}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)}$$

soustava druhého řádu s různými časovými konstantami

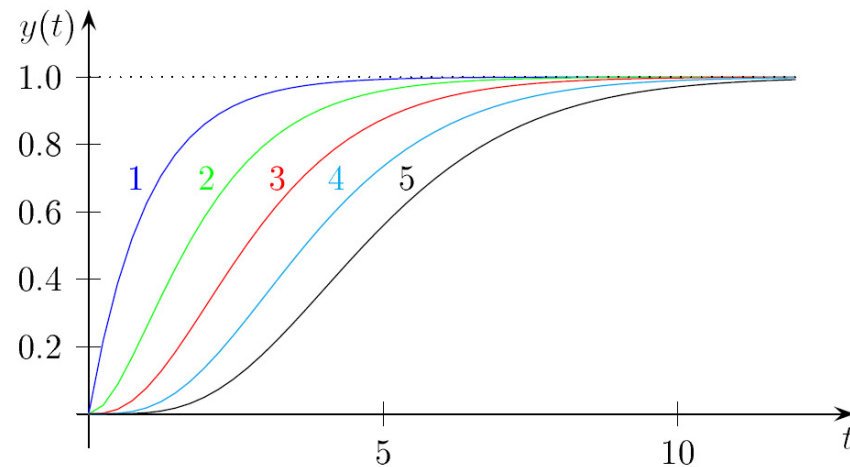
$$F_3(p) = \frac{k}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)} e^{-dp}$$

soustava druhého řádu s dopravním zpožděním

$$F_4(p) = \frac{k}{(Tp + 1)^n}$$

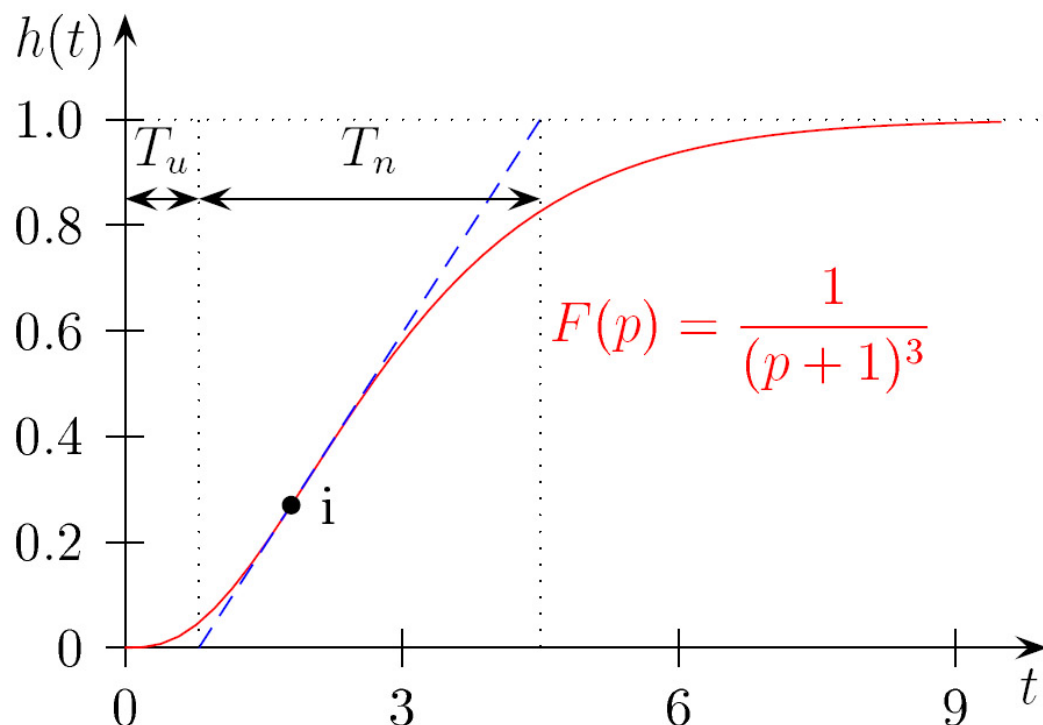
soustava  $n$ -tého řádu se stejnými časovými konstantami

Přenosová funkce v Laplaceově transformaci v polynomiálním tvaru je nejčastějším způsobem, jak popsat soustavu. Mocnina operátoru „ $p$ “ ve jmenovateli určuje řád soustavy. Soustava může obsahovat i tzv. dopravní zpoždění. S dopravním zpožděním se můžeme setkat ve sprše. Otočíme-li kohoutkem teplé vody, trvá nějakou konstantní dobu danou délkou hadice, než pocítíme teplejší vodu tekoucí z růžice.



Přechodové charakteristiky soustav 1. až 5. řádu.

# Identifikace soustav z přechodové charakteristiky



Soustavy popisujeme impulzní charakteristikou (časovou odezvou na Diracův impuls), přechodovou charakteristikou (odezvou na jednotkový skok), nebo frekvenční charakteristikou

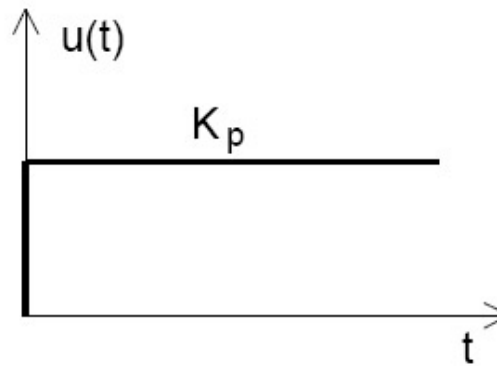
V praxi se nejsnáze měří přechodová charakteristika (zapneme proud, pustíme závaží, zapneme topení, ap.). Ze změřené charakteristiky lze odečíst hlavní časovou konstantu ( $T_n$ ), dobu prodlevy ( $T_u$ ), která svědčí na přítomnost dalších, kratších časových konstant, nebo dopravního zpoždění. Z polohy inflexního bodu „i“ lze odhadnout řád soustavy.

# Proporcionální regulátor

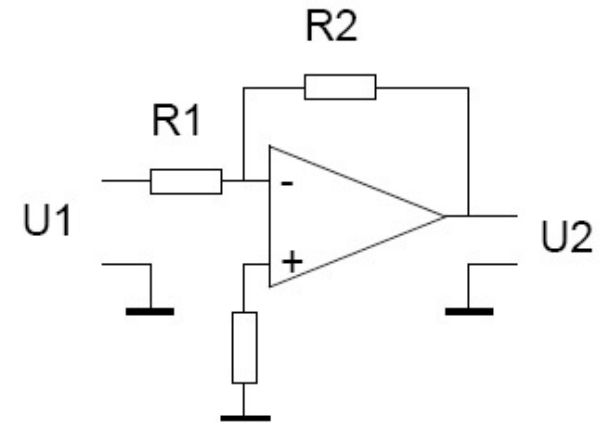
$$H_p = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{R_2}{R_1} = K_p$$



Frekv. charakteristika  
P-regulátoru



Odezva na skok  
P-regulátoru

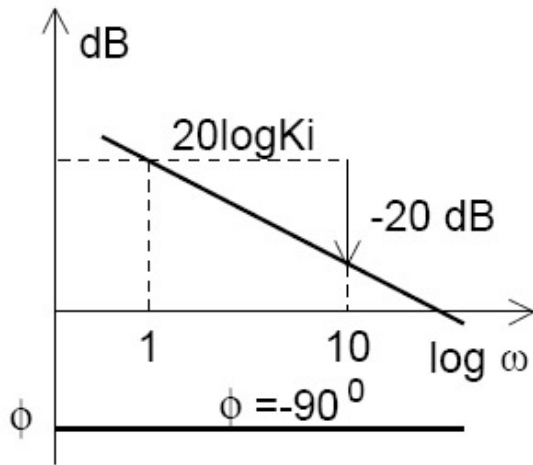


Zapojení P-regulátoru

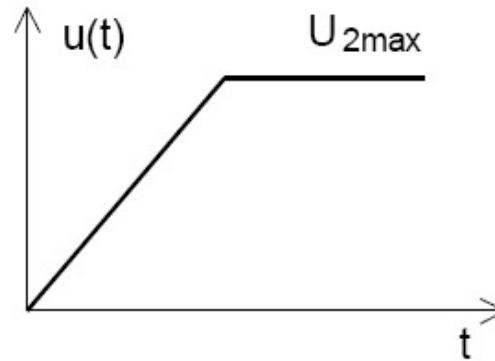
Nejjednodušším spojitým regulátorem je proporcionální „P“ regulátor. Není ničím jiným, než zesilovačem se zesílením  $K_p$ . Regulační odchylku zesílí a působí na soustavu regulačním zásahem proporcionálně úměrným této odchylce (viz splachovací nádržka).

# Integrační regulátor

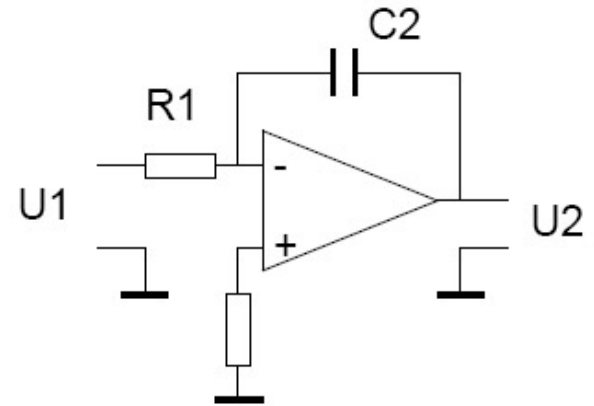
$$H(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = \frac{\frac{1}{pC_2}}{R_1} = \frac{1}{pC_2R_1}, \quad K_i = \frac{1}{C_2R_1} \quad H(p) = \frac{K_i}{p} = \frac{1}{T_i p}$$



Frekv. charakteristika  
I-regulátoru



Odezva na skok  
I-regulátoru

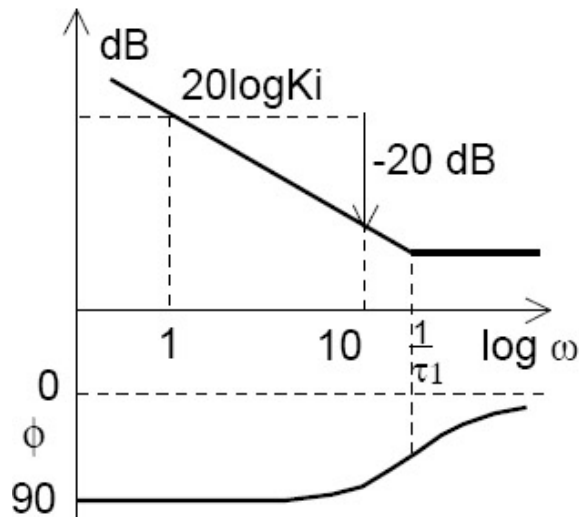


Zapojení I-regulátoru

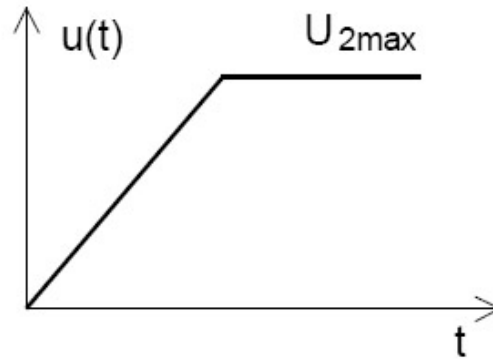
Integrační „I“ regulátor má přechodovou odezvu v podobě lineárně narůstající veličiny – integruje konstantu (přechodový skok). V soustavě řízené I regulátorem reaguje regulátor na skok postupně narůstajícím akčním zásahem, jak integruje odchylku. Jak odchylka klesá, narůstá zásah pomaleji. Integruje-li I reg. příliš rychle, dojde k překmitu. I reg. zaručí dlouhodobě nulovou odchylku. I když se objeví chybová veličina, I reg. naintegruje tak velký regulační zásah, že ji vykompenzuje.

# Proporcionálně integrační regulátor

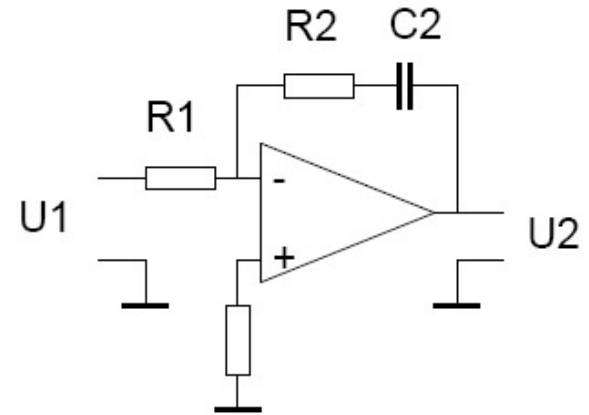
$$H(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = \frac{R_2 + \frac{1}{pC_2}}{R_1} = \frac{1 + pR_2C_2}{pR_1C_2}, \quad \tau_1 = R_2C_2, \quad \tau_0 = R_1C_2$$



Frekv. charakteristika  
I-regulátoru



Odezva na skok  
I-regulátoru

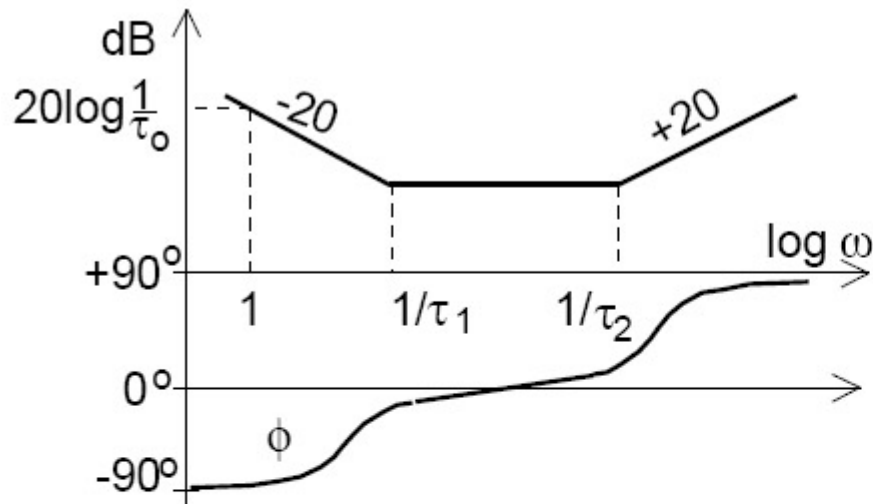


Zapojení PI-regulátor

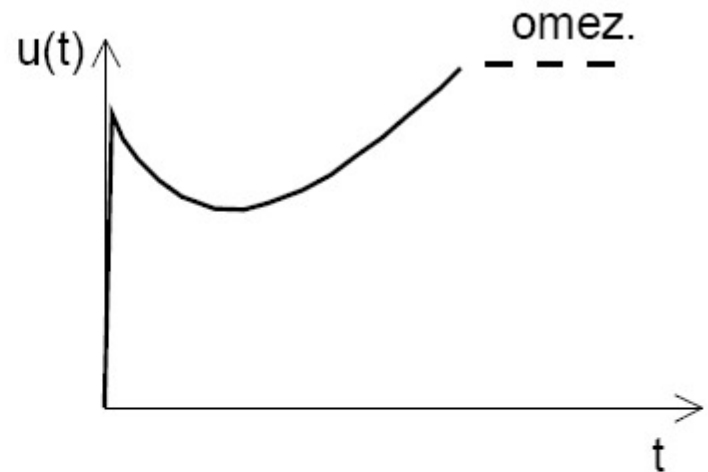
$$H(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = \frac{1 + p\tau_1}{p\tau_0}, \quad \tau_1 = \frac{K_p}{K_i}, \quad \tau_0 = \frac{1}{K_i}$$

Velmi užitečná kombinace P a I regulátoru je „PI“ regulátor. Spojuje výhody P regulátoru, který reaguje okamžitě a I regulátoru, který zaručí nulovou dlouhodobou odchylku (dokáže naintegrovat velký zásah).

# PID regulátor



Frekvenční charakteristika  
PID-regulátoru

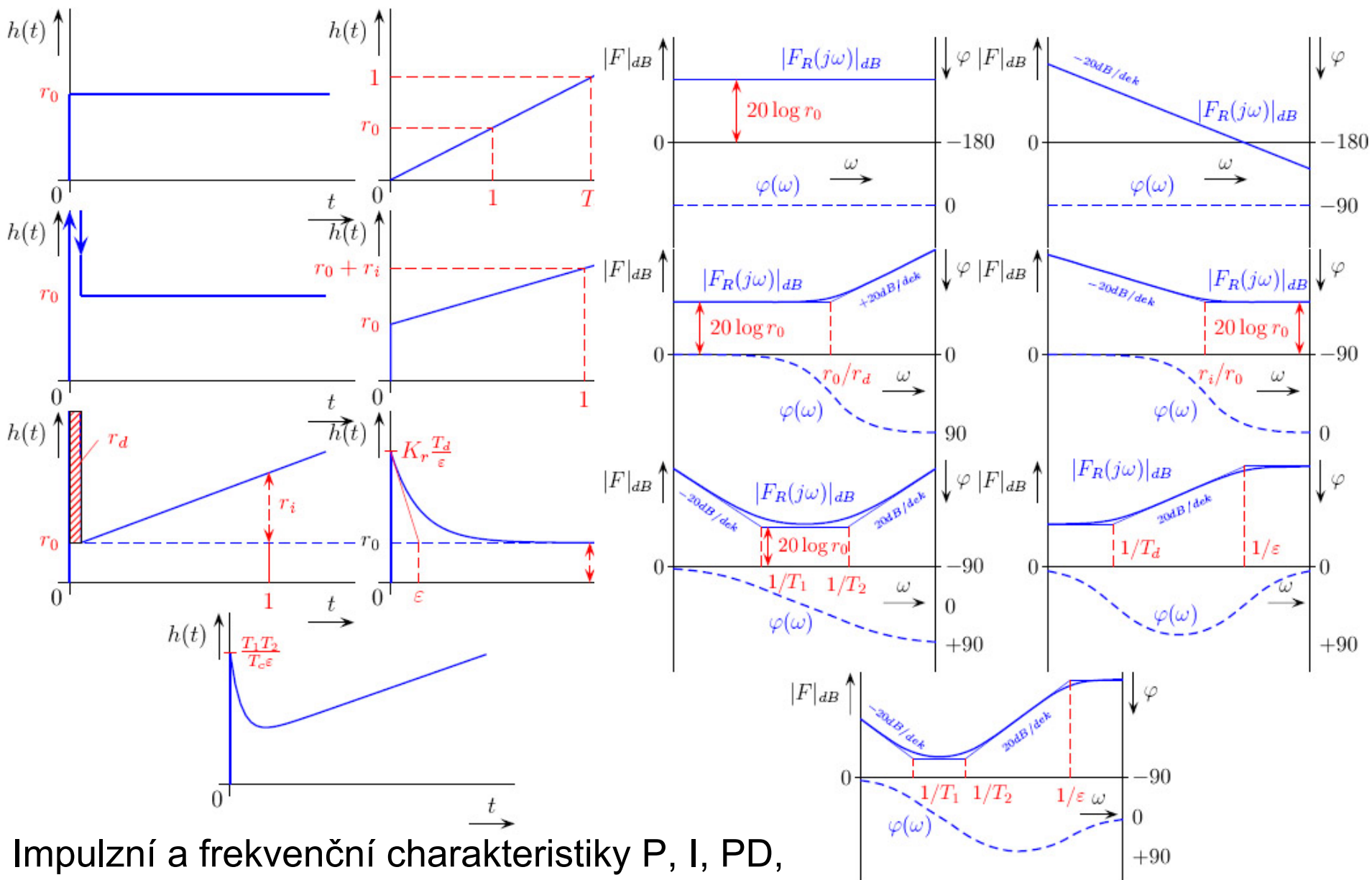


Odezva na skok  
PID-regulátoru

$$H(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d \cdot p = \frac{(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2)}{p\tau_0}$$

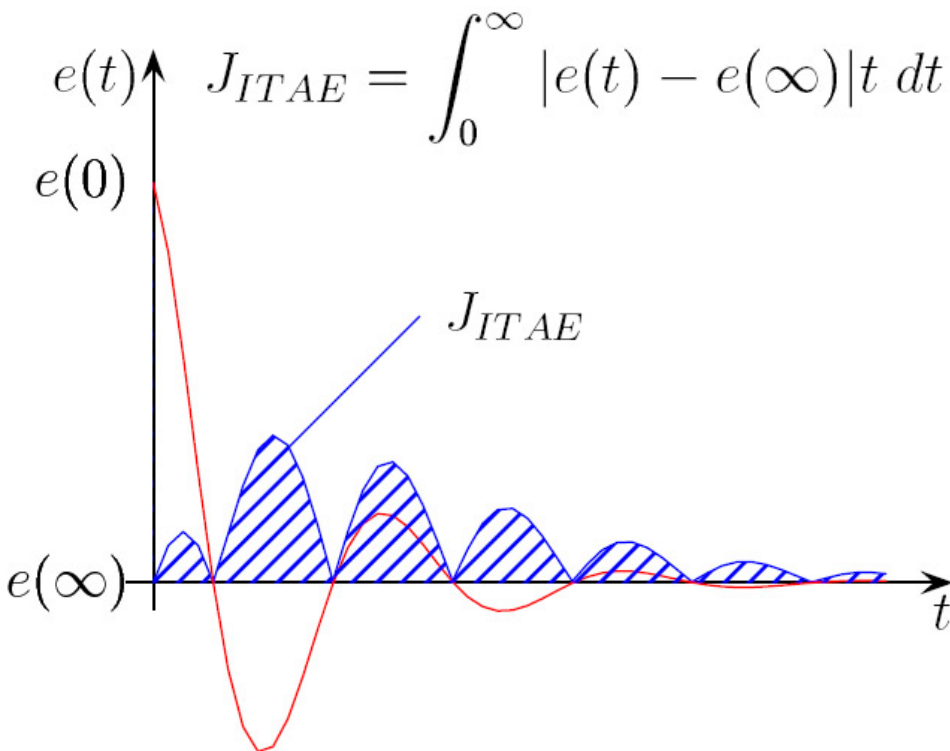
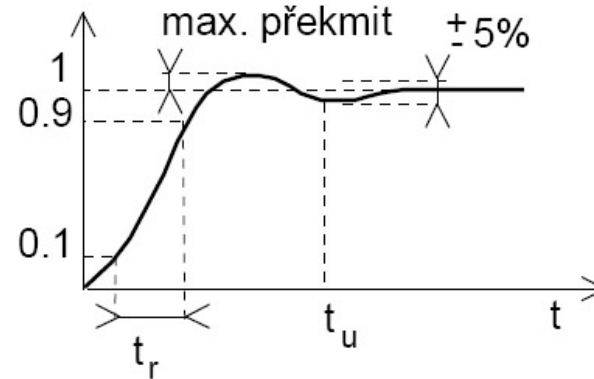
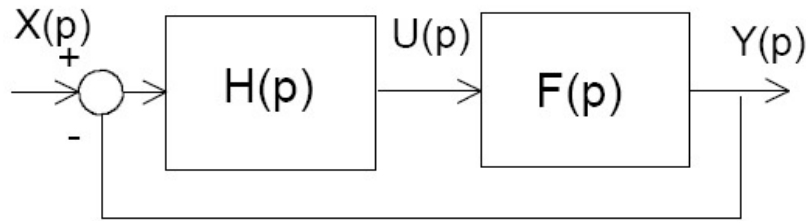
Univerzální spojitý regulátor, který poslouží pro většinu soustav. K PI regulátoru je přidána derivační „D“ složka, která reaguje derivační špičkou na přechodový děj. Dokáže urychlit odezvu regulované soustavy. Derivační složka je ale nebezpečná, může snadno způsobit kmitání.

# Přehled charakteristik regulátorů



Impulzní a frekvenční charakteristiky P, I, PD, PI, PID, reálného PD a reálného PID

# Kritéria pro návrh regulátorů



Obvykle chceme, aby soustava co nejrychleji a s nejmenšími odchylkami sledovala průběh požadované hodnoty. Kritérii pro hodnocení kvality regulace (a návrh regulátoru) je celá řada, např. kritérium ITAE, které integruje absolutní hodnotu odchylky a násobí ji váhovou funkcí narůstající lineárně s časem (čím později, tím víc odchylka vadí). Návrh regulátoru je pak optimalizací minimalizující tuto hodnotu.

# Ziegler – Nicholsonova metoda

## Ziegler-Nicholsonova metoda ladění PID-regulátoru

Ziegler-Nicholsonova metoda ladění PID-regulátoru je experimentální metoda, sloužící k nalezení konstant P-, PI- nebo PID-regulátoru, při čemž nemusíme znát matematický model (přenosovou funkci) regulované soustavy. Metodu lze rovněž použít ke hledání vhodného regulátoru počítačovou simulací, pak ovšem musíme mít i model soustavy.

Zpětnovazební soustava je tvořena regulátorem  $H(p)$  a regulovanou soustavou  $F(p)$ .

Postup nastavování:

1. Nejprve nastavíme regulátor pouze jako P-regulátor:  $H(p) = K_p$ . Zvyšujeme zesílení až na hodnotu  $K_p = K_{pm}$ , při které soustava začne kmitat a změříme frekvenci kmitání  $\omega_m$ .
2. Konstanty příslušných regulátorů dle zvoleného typu (P, PI, PID) nastavíme dle této tabulky:

|               | $K_p$      | $T_i$                 | $T_d$           |
|---------------|------------|-----------------------|-----------------|
| P-regulátor   | $0,5 K_m$  | -                     | -               |
| PI-regulátor  | $0,45 K_m$ | $10\pi^2/3\omega_m^2$ | -               |
| PID-regulátor | $0,6 K_m$  | $\pi/\omega_m$        | $\pi/4\omega_m$ |