Přesné a modelové výpočty optických vlastností

Numericky je řešení paraxiální trajektorie snazší než nalezení potenciálu. Rovnice trajektorie je soustava (u rotačně souměrných čoček obsahující pouze jednu rovnici) obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu. Pro známé rozložení potenciálu na ose spočteme pro zadané počáteční podmínky snadno příslušnou trajektorii. Má-li rovnice pravou stranu (vychylovací systémy, prvky s disperzí, započtení neparaxiálního chování, tj. optických vad) užijeme pro nehomogenní rovnici před numerickým výpočtem metodu variace konstant.

Pro získání kvalitativních představ je však vždy výhodné mít analytická řešení paraxiálních rovnic i pro velmi hrubé modely osového rozložení potenciálů či polí. Nejjednodušším případem je *krabicový model***.** V oblasti působení optického prvku délky L pokládáme mohutnost optického prvku za konstantní, vně této oblasti rovnu nule. Uvnitř oblasti tedy řešíme jednoduchou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 h(z)}{\mathrm{d} z^2} \pm \frac{1}{\varsigma^2} h(z) = 0 \quad , \quad 0 \le z \le L \quad , \tag{19}$$

a tato řešení spojitě napojujeme na polopřímkové paprsky vně oblasti. Tento model dává překvapivě dobré výsledky, zvláště je-li doplněn započtením vlivu rozptylového pole na koncích oblasti. (Z rovnic pole totiž nutně plyne, že prudká změna velikosti jedné složky je provázena změnou jiné složky pole.)

Ukažme si výsledky modelu na výpočtu ohniskové dálky tenké elektrostatické a magnetické rotačně souměrné čočky a tenké elektrostatické a magnetické kvadrupólové čočky. Řešení rovnice má tvar

$$h = \varsigma h'(0) \sin\frac{z}{\varsigma} + h(0)\cos\frac{z}{\varsigma} \tag{20}$$

pro kladné znaménko a pro znaménko záporné

$$h = \varsigma h'(0) \sinh\frac{z}{\varsigma} + h(0)\cosh\frac{z}{\varsigma} \quad . \tag{21}$$

Tenká čočka nezmění podstatně polohu paprsku $h(0)$, ale způsobí změnu směrnice $h'(0)$ na hodnotu $h'(0) - h(0)/f$, kde f je hledaná ohnisková dálka čočky (musí tedy být $f \ge L$). Ponecháním jen nejnižšího členu rozvoje dostáváme

$$f \approx \pm \frac{\varsigma^2}{L} \quad . \tag{22}$$

Získáme tak pro odhad ohniskové dálky tenké rotačně souměrné elektrostatické čočky (kde E je typická hodnota osové intenzity elektrostatického pole, maximální pole na ose je omezeno velikostí průrazu vakua - kolem 10 kV/mm=10^7 V/m) a tenké magnetické čočky (kde B je typická hodnota osové indukce magnetického pole, většinou omezená sycením pólových nástavců na 2 T), které mají délku pole L, vztah

$$f \approx \frac{16\phi^2}{3E^2 L} \quad , \quad f \approx \frac{8m\phi}{qB^2 L} \quad . \tag{23}$$

Pro ohniskové dálky tenké kvadrupólové elektrostatické čočky (±U je potenciál na elektrodách kvadrupólu uložených na kružnici poloměru r_0) a tenké kvadrupólové magnetické čočky (±*NI* jsou amperzávity budicí pólové nástavce kvadrupólu uložené na kružnici o poloměru r_0)

$$f \approx \pm \frac{r_0^2 \phi}{U L} \quad , \quad f \approx \pm \frac{r_0^2}{\mu_0 NI L}\sqrt{\frac{m\phi}{2q}} \quad . \tag{24}$$